

ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ DISPERZNÍCH KŘIVEK V DESCE S KUBICKOU ANIZOTROPIÍ PRO LIBOVOLNÝ SMĚR ŠÍŘENÍ

Olga ČERVENÁ¹, Petr HORA²

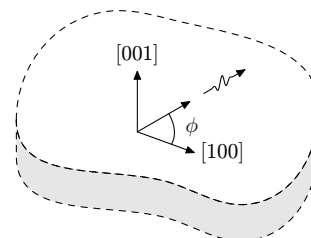
Abstract: This paper deals with analytical formulation of dispersion curves for stress waves in a free (001)-cut cubic plate. The direction of wave propagation is arbitrary and it is defined by the angle ϕ , the angle between the [100] axis and the wave vector. The dispersion curves for Cu are presented. These results are compared to the uncoupled Mindlin modes.

Keywords: Dispersion curves, cubic anisotropy, wave propagation

1. ÚVOD

Předmětem příspěvku je získání disperzních vztahů pro nekonečnou tlustou desku tloušťky $2d$ s volnými okrajovými podmínkami, která má kubickou anizotropii a krystalografickou orientaci (001). Disperzní chování je vyšetřováno pro libovolný směr šíření v rovině desky, který je dán úhlem ϕ mezi osou [100] a vlnovým vektorem viz obr.1.

Pro $\phi = 0^\circ$ byly výsledky uvedeny v Hora (2005) a jsou shrnuty v kapitole 2. Nově byly odvozeny analytické disperzní vztahy pro úhel $\phi = 45^\circ$ a libovolný úhel. Výsledky pro úhel $\phi = 45^\circ$ jsou uvedeny v kapitole 3 a pro obecný úhel v kapitole 4. Pro odvození disperzních vztahů jsme použili systém pro symbolické výpočty Maple, bez kterého bychom hledané vztahy jen těžko získali. Největší pomocí systému Maple byla jeho schopnost rozložit determinant matice řádu 6 na součin dvou členů, z nichž jeden reprezentuje symetrické módy a druhý antisymetrické módy disperzních křivek.



Obr. 1. Směr šíření v rovině (001).

Analýza disperzního chování desky byla provedena metodou parciálních vln Auld (1973). Při výpočtu disperzních křivek byly použity materiálové konstanty mědi podle Hearmon (1965).

Pro snažší pochopení chování symetrických a antisymetrických módů v izotropní desce vyvinul Mindlin (1960) metodu oddělených módů, která spočívá v zavedení speciálních okrajových podmínek pro napětí T a výchylky u

$$T_{xz} = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{nebo} \quad T_{zz} = 0, \quad u_x = 0. \quad (1)$$

Tyto okrajové podmínky lze použít pro dělení módů při $\phi = 0^\circ$ a $\phi = 45^\circ$, kdy sagitální rovina tvoří rovinu symetrie krystalu a lze tedy oddělit SH-módy. Pro obecný úhel šíření, kdy nelze oddělit SH-módy, jsme k získání oddělených módů museli doplnit výše uvedené okrajové podmínky o podmínku $u_y = 0$.

¹RNDr. Olga Červená, CDM ÚT AV ČR, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň, tel.: +420 377236415, e-mail: cervena@cdm.it.cas.cz

²Ing. Petr Hora, CSc. tamtéž, e-mail: hora@cdm.it.cas.cz

2. SMĚR ŠÍŘENÍ [100]

V případě, kdy má deska s kubickou anizotropií orientaci (001) a vyšetřujeme směr šíření [100], tj. $\phi = 0^\circ$, se Christoffelova rovnice redukuje na

$$\begin{pmatrix} c_{11} + c_{44} l_z^{(n)2} - \rho v^2 & 0 & (c_{12} + c_{44}) l_z^{(n)} \\ 0 & c_{44} (1 + l_z^{(n)2}) - \rho v^2 & 0 \\ (c_{12} + c_{44}) l_z^{(n)} & 0 & c_{44} + c_{11} l_z^{(n)2} - \rho v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x^{(n)} \\ \alpha_y^{(n)} \\ \alpha_z^{(n)} \end{pmatrix} = 0, \quad (2)$$

kde c_{ij} jsou elastické konstanty, ρ je hustota, v je fázová rychlost šíření, l_z je poměr složek vlnového vektoru (k_z/k_x), $\alpha_x^{(n)}$, $\alpha_y^{(n)}$ a $\alpha_z^{(n)}$ jsou složky polarizace n -té parciální vlny.

Determinant soustavy se rozdělí na

$$\left(c_{11} + c_{44} l_z^{(n)2} - \rho v^2 \right) \left(c_{44} + c_{11} l_z^{(n)2} - \rho v^2 \right) - (c_{12} + c_{44})^2 l_z^{(n)2} = 0 \quad (3)$$

a

$$c_{44} \left(1 + l_z^{(n)2} \right) - \rho v^2 = 0. \quad (4)$$

Čtyři kořeny $l_z^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3, 4$) rovnice (3) vedou na parciální vlny typu P a SV. Okrajové podmínky volného povrchu desky ($T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0$) jsou splněny, pokud platí

$$\frac{\operatorname{tg} \left(l_z^{(1)} kd \right)}{\operatorname{tg} \left(l_z^{(3)} kd \right)} = \frac{\left(c_{12} \alpha_x^{(1)} + c_{11} \alpha_z^{(1)} l_z^{(1)} \right) \left(\alpha_x^{(3)} l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)} \right)}{\left(c_{12} \alpha_x^{(3)} + c_{11} \alpha_z^{(3)} l_z^{(3)} \right) \left(\alpha_x^{(1)} l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)} \right)} \quad (5)$$

nebo

$$\frac{\operatorname{tg} \left(l_z^{(1)} kd \right)}{\operatorname{tg} \left(l_z^{(3)} kd \right)} = \frac{\left(c_{12} \alpha_x^{(3)} + c_{11} \alpha_z^{(3)} l_z^{(3)} \right) \left(\alpha_x^{(1)} l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)} \right)}{\left(c_{12} \alpha_x^{(1)} + c_{11} \alpha_z^{(1)} l_z^{(1)} \right) \left(\alpha_x^{(3)} l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)} \right)}, \quad (6)$$

kde k je vlnové číslo, $\alpha_x^{(n)} = -(c_{12} + c_{44}) l_z^{(n)}$, $\alpha_z^{(n)} = c_{11} + c_{44} l_z^{(n)2} - \rho v^2$ pro $n = 1, 3$.

Rovnice (5) představuje disperzní závislost pro symetrické módy a rovnice (6) závislost pro antisymetrické módy.

Dva kořeny $l_z^{(n)}$ ($n = 5, 6$) rovnice (4) odpovídají parciálním vlnám pro horizontálně polarizované módy. Pro splnění okrajových podmínek je třeba, aby

$$l_z^{(5)} = N\pi/2kd \quad \text{pro} \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Jedná se o čistě SH-módy stejně jako v izotropním případě.

Grafické znázornění těchto disperzních závislostí spolu se závislostí SH-módů je znázorněno na obr. 2 vlevo.

Mindlinovy okrajové podmínky (1) jsou splněny, pokud platí

$$\sin \left(l_z^{(1)} kd \right) \cos \left(l_z^{(1)} kd \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \left(2 l_z^{(1)} kd \right) = 0 \quad (8)$$

nebo

$$\sin \left(l_z^{(3)} kd \right) \cos \left(l_z^{(3)} kd \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \left(2 l_z^{(3)} kd \right) = 0. \quad (9)$$

3. SMĚR ŠÍŘENÍ [110]

V případě, kdy má deska s kubickou anizotropií orientaci (001) a vyšetřujeme směr šíření [110], tj. $\phi = 45^\circ$, lze pro disperzní křivky získat opět analytické vyjádření.

V tomto případě se Christoffelova rovnice redukuje na

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) + c_{44}(1 + l_z^{(n)2}) - \rho v^2 & 0 & (c_{12} + c_{44})l_z^{(n)} \\ 0 & c_{44}l_z^{(n)2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) - \rho v^2 & 0 \\ (c_{12} + c_{44})l_z^{(n)} & 0 & c_{44} + c_{11}l_z^{(n)2} - \rho v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x^{(n)} \\ \alpha_y^{(n)} \\ \alpha_z^{(n)} \end{pmatrix} = 0. \quad (10)$$

Determinant soustavy se rozdělí na

$$\left(\frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) + c_{44}(1 + l_z^{(n)2}) - \rho v^2 \right) \left(c_{44} + c_{11}l_z^{(n)2} - \rho v^2 \right) - (c_{12} + c_{44})^2 l_z^{(n)2} = 0 \quad (11)$$

a

$$c_{44}l_z^{(n)2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) - \rho v^2 = 0. \quad (12)$$

Čtyři kořeny $l_z^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3, 4$) rovnice (11) vedou na parciální vlny typu P a SV. Okrajové podmínky volného povrchu desky ($T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0$) jsou splněny, pokud platí

$$\frac{\operatorname{tg}(l_z^{(1)}kd)}{\operatorname{tg}(l_z^{(3)}kd)} = \frac{(c_{12}\alpha_x^{(1)} + c_{11}\alpha_z^{(1)}l_z^{(1)}) (\alpha_x^{(3)}l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)})}{(c_{12}\alpha_x^{(3)} + c_{11}\alpha_z^{(3)}l_z^{(3)}) (\alpha_x^{(1)}l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)})} \quad (13)$$

nebo

$$\frac{\operatorname{tg}(l_z^{(1)}kd)}{\operatorname{tg}(l_z^{(3)}kd)} = \frac{(c_{12}\alpha_x^{(3)} + c_{11}\alpha_z^{(3)}l_z^{(3)}) (\alpha_x^{(1)}l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)})}{(c_{12}\alpha_x^{(1)} + c_{11}\alpha_z^{(1)}l_z^{(1)}) (\alpha_x^{(3)}l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)})}, \quad (14)$$

kde $\alpha_x^{(n)} = -(c_{12} + c_{44})l_z^{(n)}$, $\alpha_z^{(n)} = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) + c_{44}(1 + l_z^{(n)2}) - \rho v^2$ pro $n = 1, 3$.

Rovnice (13) představuje disperzní závislost pro symetrické módy a rovnice (14) závislost pro antisymetrické módy.

Dva kořeny $l_z^{(n)}$ ($n = 5, 6$) rovnice (12) odpovídají parciálním vlnám pro horizontálně polarizované módy. Pro splnění okrajových podmínek je třeba, aby

$$l_z^{(5)} = N\pi/2kd \quad \text{pro} \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Opět se jedná se o čistě SH-módy stejně jako v předchozím případě.

Grafické znázornění těchto disperzních závislostí spolu se závislostí SH-módů je znázorněno na obr. 2 vpravo.

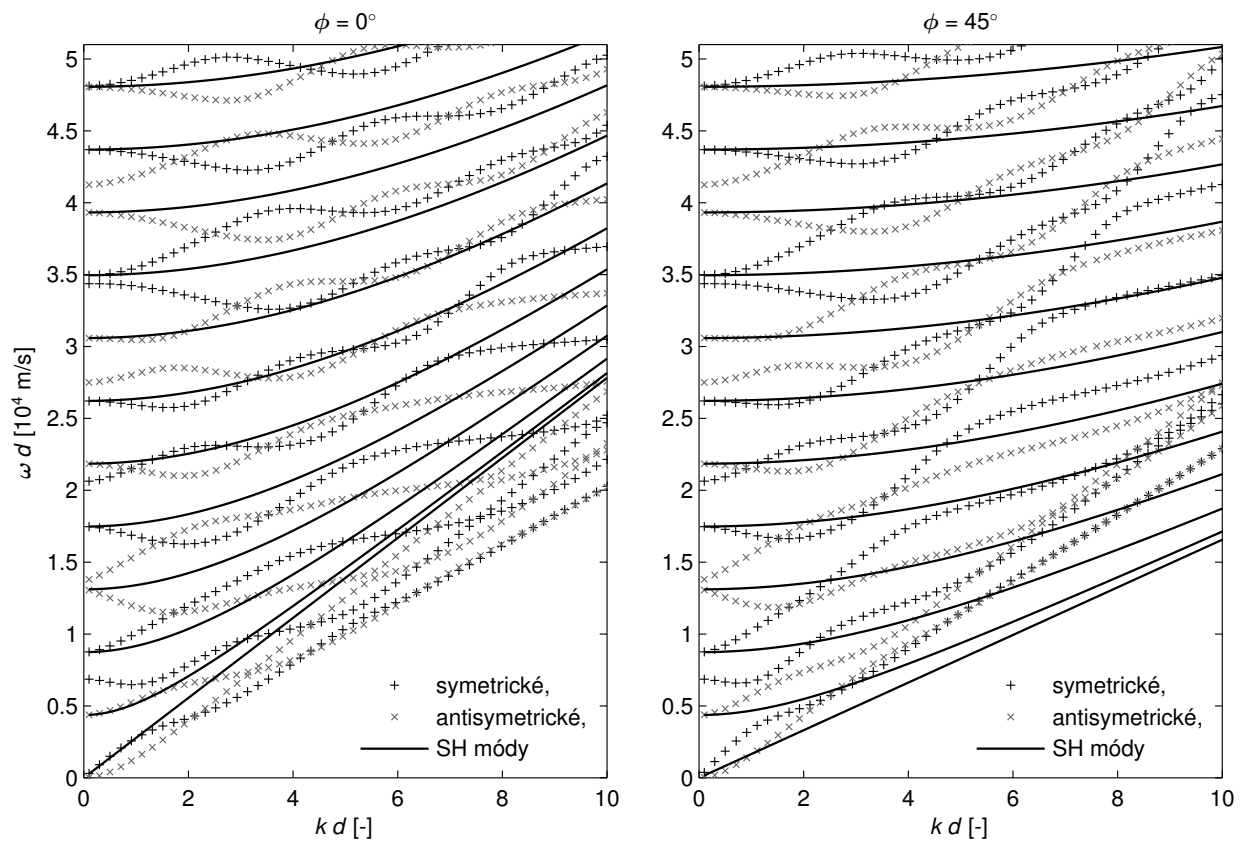
Mindlinovy okrajové podmínky (1) jsou splněny, pokud platí

$$\sin(l_z^{(1)}kd) \cos(l_z^{(1)}kd) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2l_z^{(1)}kd) = 0 \quad (16)$$

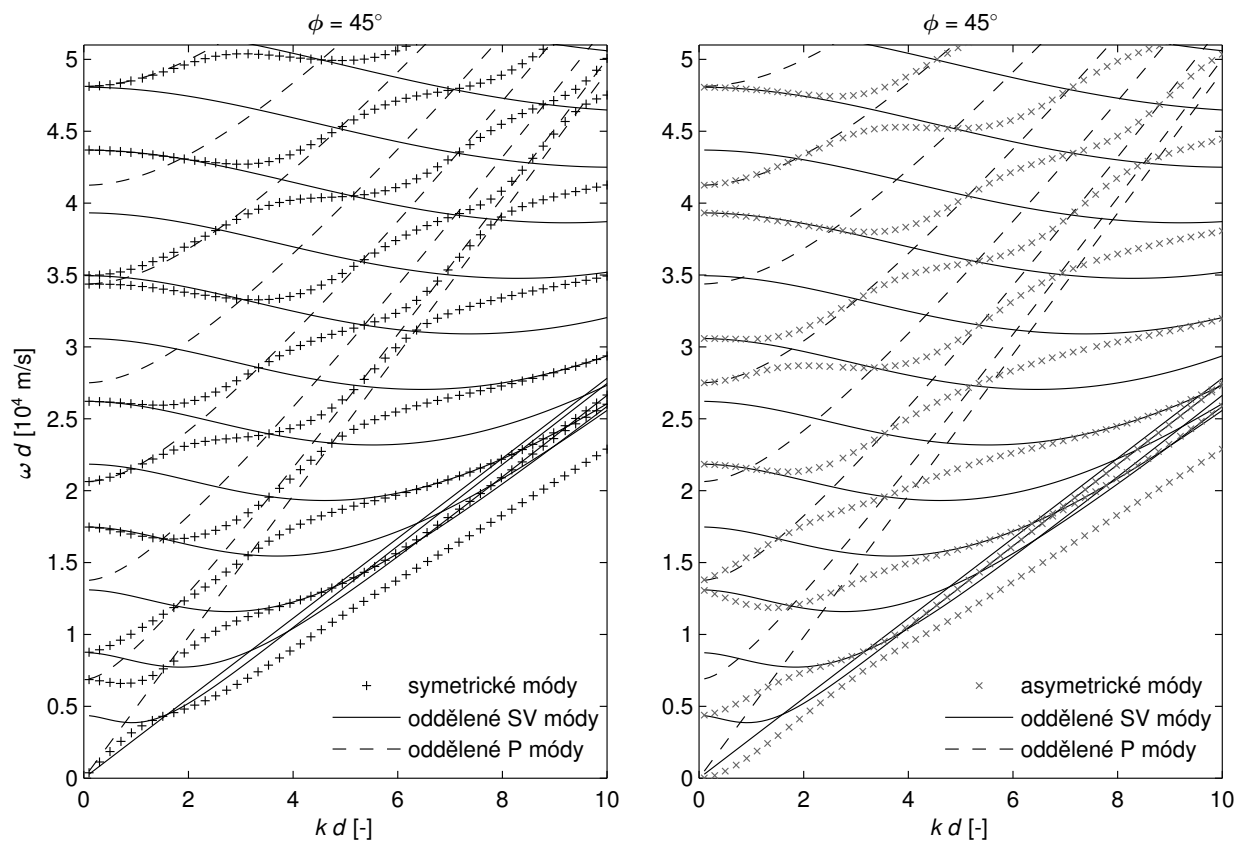
nebo

$$\sin(l_z^{(3)}kd) \cos(l_z^{(3)}kd) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2l_z^{(3)}kd) = 0. \quad (17)$$

Mindlinovy oddělené módy jsou spolu s disperzními křivkami pro symetrické a antisymetrické módy desky s kubickou anizotropií a směr šíření [110] zakresleny v obr. 3.



Obr. 2. Disperzní křivky pro SH-módy a (anti)symetrické módy pro směry šíření [100] a [110].



Obr. 3. Disperzní křivky pro (anti)symetrické módy a Mindlinovy křivky pro směr šíření [110].

4. LIBOVOLNÝ SMĚR ŠÍŘENÍ

Uvažujeme opět desku s kubickou anizotropií a orientací (001) a vyšetřujeme obecný směr šíření v rovině desky.

Christoffelova rovnice má v tomto případě tvar

$$\begin{pmatrix} K_A + c_{11} + c_{44}l_z^{(n)2} - \rho v^2 & K_B & (c_{12} + c_{44})l_z^{(n)} \\ K_B & (l_z^{(n)2} + 1)c_{44} - K_A - \rho v^2 & 0 \\ (c_{12} + c_{44})l_z^{(n)} & 0 & c_{44} + c_{11}l_z^{(n)2} - \rho v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x^{(n)} \\ \alpha_y^{(n)} \\ \alpha_z^{(n)} \end{pmatrix} = 0, \quad (18)$$

kde $K_A = -2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi (c_{11} - c_{12} - 2c_{44})$,
 $K_B = (1 - 2 \cos^2 \phi) (c_{11} - c_{12} - 2c_{44}) \sin \phi \cos \phi$.

V tomto případě se už nevyskytují SH-módy, ale pouze symetrické a antisymetrické módy. Okrajové podmínky volného povrchu desky ($T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0$) jsou splněny, pokud platí

$$C_A \operatorname{tg}(l_z^{(1)}kd) + C_B \operatorname{tg}(l_z^{(3)}kd) + C_C \operatorname{tg}(l_z^{(5)}kd) = 0 \quad (19)$$

nebo

$$C_A \operatorname{cotg}(l_z^{(1)}kd) + C_B \operatorname{cotg}(l_z^{(3)}kd) + C_C \operatorname{cotg}(l_z^{(5)}kd) = 0, \quad (20)$$

kde

$$C_A = (c_{11}\alpha_z^{(1)}l_z^{(1)} + c_{12}) [\alpha_y^{(5)}l_z^{(5)} (\alpha_z^{(3)} + l_z^{(3)}) - \alpha_y^{(3)}l_z^{(3)} (l_z^{(5)} + \alpha_z^{(5)})],$$

$$C_B = (c_{11}\alpha_z^{(3)}l_z^{(3)} + c_{12}) [\alpha_y^{(1)}l_z^{(1)} (\alpha_z^{(5)} + l_z^{(5)}) - \alpha_y^{(5)}l_z^{(5)} (l_z^{(1)} + \alpha_z^{(1)})],$$

$$C_C = (c_{11}\alpha_z^{(5)}l_z^{(5)} + c_{12}) [\alpha_y^{(3)}l_z^{(3)} (\alpha_z^{(1)} + l_z^{(1)}) - \alpha_y^{(1)}l_z^{(1)} (l_z^{(3)} + \alpha_z^{(3)})]$$

a

$$\alpha_y^{(n)} = \frac{K_B}{K_A + \rho v^2 - (l_z^{(n)2} + 1)c_{44}}, \quad \alpha_z^{(n)} = \frac{(c_{12} + c_{44})l_z^{(n)}}{\rho v^2 - c_{44} - c_{11}l_z^{(n)2}} \quad \text{pro } n = 1, 3, 5.$$

Rovnice (19) představuje disperzní závislost pro symetrické módy a rovnice (20) závislost pro antisymetrické módy.

Mindlinovy okrajové podmínky (1) doplněny o podmínku $u_y = 0$ jsou splněny, pokud platí

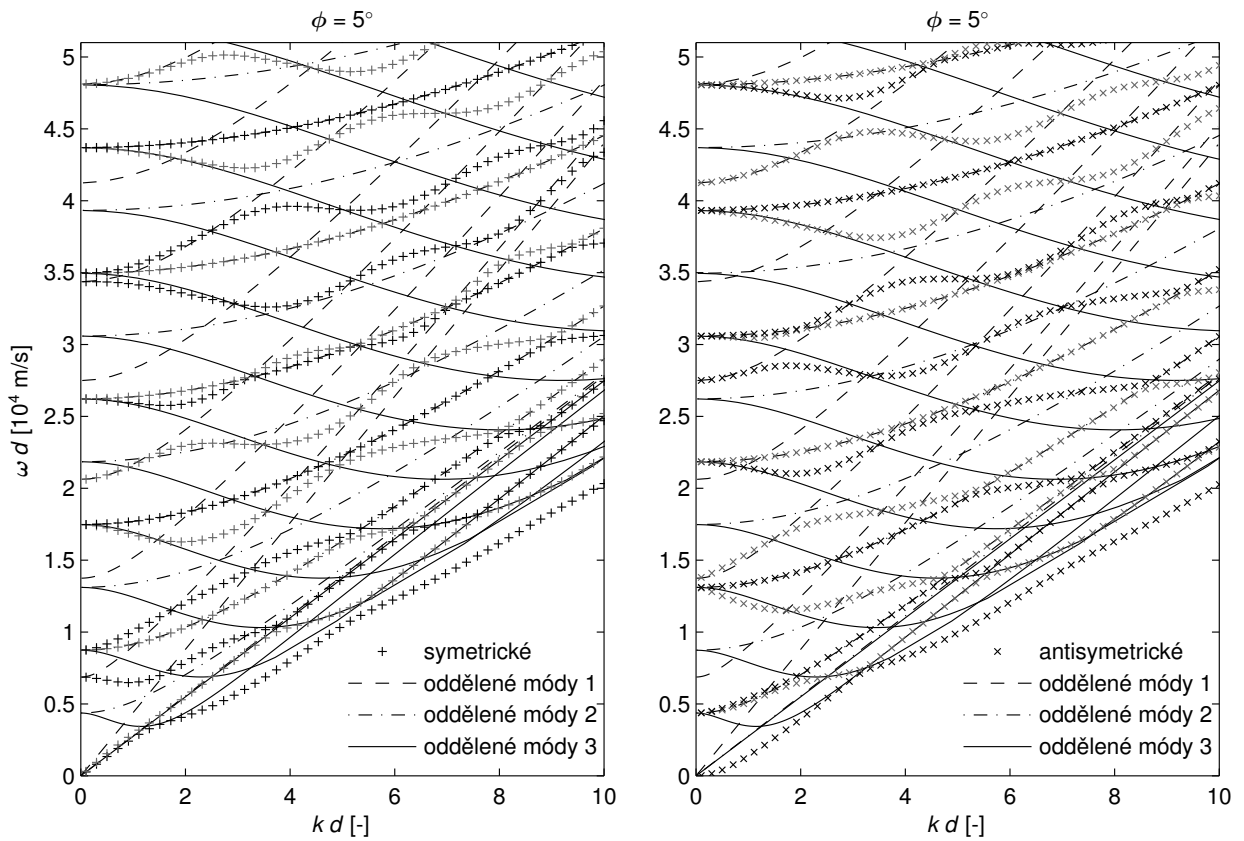
$$\sin(l_z^{(1)}kd) \cos(l_z^{(1)}kd) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2l_z^{(1)}kd) = 0, \quad (21)$$

$$\sin(l_z^{(3)}kd) \cos(l_z^{(3)}kd) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2l_z^{(3)}kd) = 0 \quad (22)$$

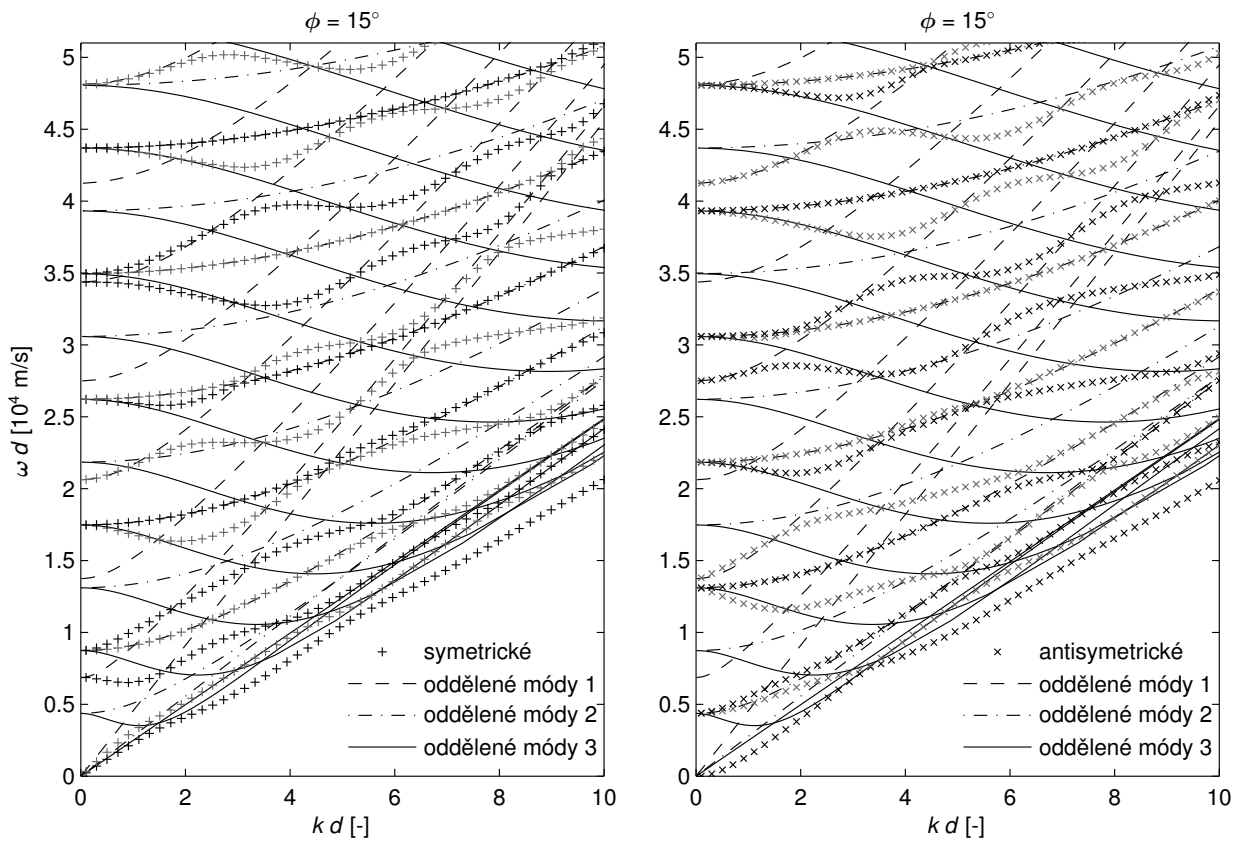
nebo

$$\sin(l_z^{(5)}kd) \cos(l_z^{(5)}kd) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2l_z^{(5)}kd) = 0. \quad (23)$$

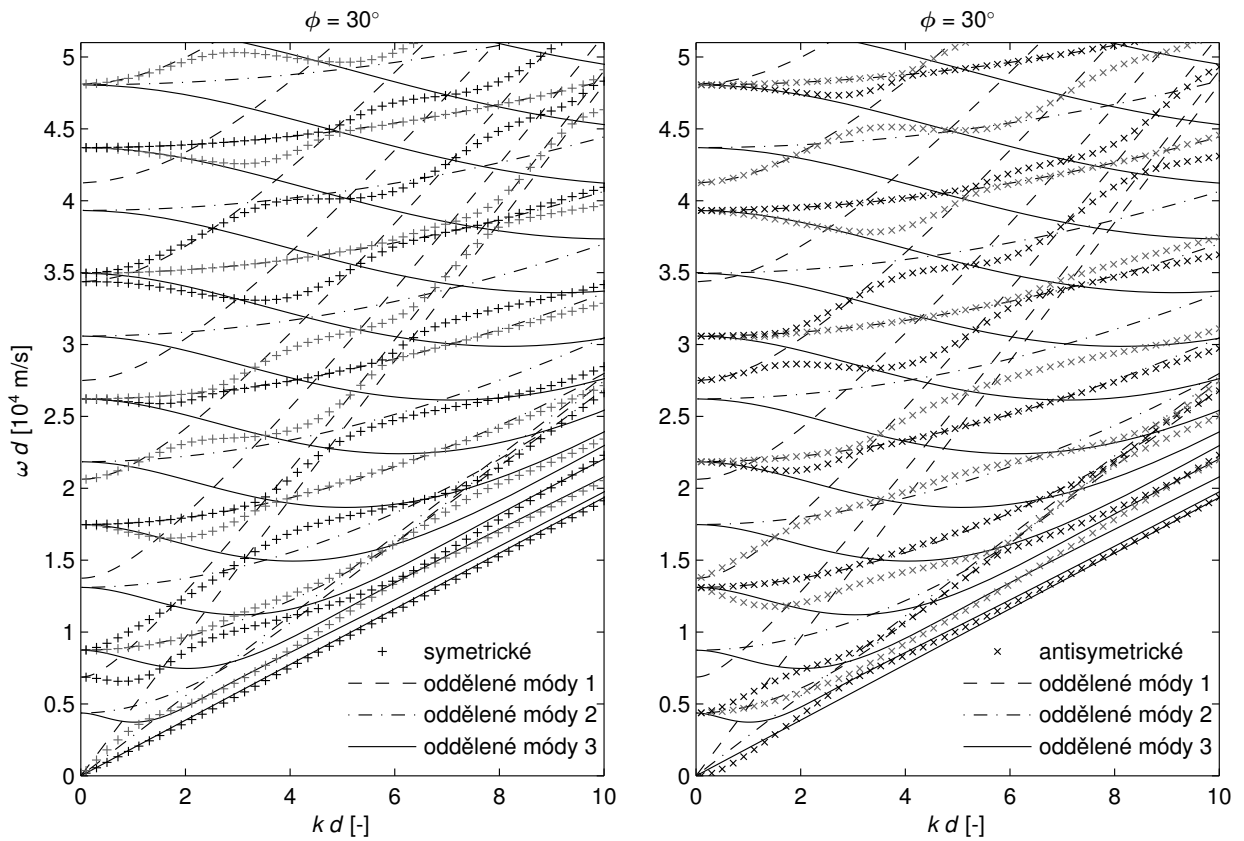
Zobecněné Mindlinovy oddělené módy spolu s disperzními křivkami pro symetrické a antisymetrické módy desky s kubickou anizotropií pro směry šíření ϕ : 5°, 15°, 30° a 40° jsou zakresleny v obr. 4 – 7.



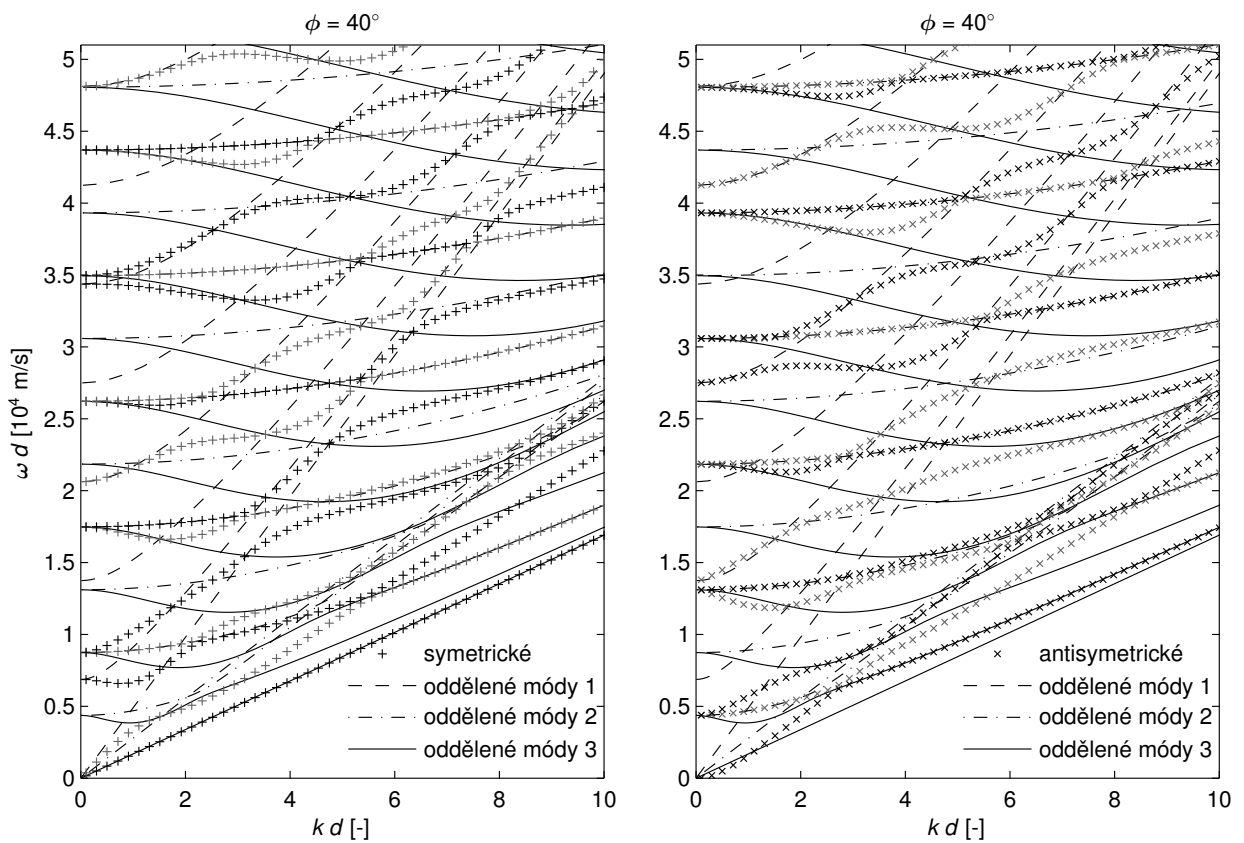
Obr. 4. Disperzní křivky pro (anti)symetrické módy a Mindlinovy křivky pro směr šíření 5° .



Obr. 5. Disperzní křivky pro (anti)symetrické módy a Mindlinovy křivky pro směr šíření 15° .



Obr. 6. Disperzní křivky pro (anti)symetrické módy a Mindlinovy křivky pro směr šíření 30° .



Obr. 7. Disperzní křivky pro (anti)symetrické módy a Mindlinovy křivky pro směr šíření 40° .

5. ZÁVĚR

V příspěvku jsou uvedena analytická vyjádření disperzních vztahů pro nekonečnou tlustou desku s kubickou anizotropií a volnými okrajovými podmínkami. Analytické vztahy disperzních závislostí byly odvozeny pro libovolný směr šíření v rovině desky s orientací (001). K odvození disperzních závislostí bylo použito metody parciálních vln a s výhodou použit systém pro symbolické výpočty Maple. Získané disperzní křivky byly porovnány s výsledky Mindlinovy teorie oddělených módů, která byla rozšířena pro obecný směr šíření. V příspěvku jsou dále zobrazeny disperzní závislosti společně s křivkami oddělených módů pro měď a některé konkrétní směry šíření. Tyto grafy byly vyčísleny pomocí programového systému Matlab.

Všechny uvedené výsledky jsou ve shodě s prací Solie a Auld (1973), kde však byly disperzní vztahy počítány numericky pomocí obecného programu pro výpočet vrstevnatého anizotropního prostředí.

Znalost disperzních křivek lze využít v inverzním algoritmu pro stanovení elastických konstant a při výpočtu jednotlivých složek posuvů a napětí. Zobecněné Mindlinovy oddělené módy lze použít pro aproximaci a kontrolu výpočtu disperzních závislostí.

Poděkování: Příspěvek vznikl na základě podpory projektu GA ČR č. 101/06/0213 *Nestacionární napjatost a disperzní vlastnosti ortotropních těles* (řešitel Ing. F. Valeš, CSc.) a záměru ÚT AV ČR AV0Z20760514.

LITERATURA

- Auld, B.A., 1973. *Acoustic fields and waves in solids, vol. 1*. John Wiley, New York.
- Hearmon, R.F.S., 1965. *Úvod do teorie pružnosti anizotropních látek*. SNTL, Praha.
- Hora, P., Červená O., 2005. Disperzní křivky v desce s kubickou anizotropií. *Proceedings, 21th Conference Computational mechanics 2005*.
- Maplesoft™,
<http://www.maplesoft.com>
- Mindlin, R.D., 1960. *Structural Mechanics*. Pergamon, New York.
- Solie, L.P., and Auld, B.A., 1973. Elastic waves in free anisotropic plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 54. pp 50-65.
- The MathWorks, Inc.,
<http://www.mathworks.com>