



Západočeská univerzita
Institut technologie a spolehlivosti
Plzeň, Veleslavínova 11

Autor : Ing. Petr HORA, CSc.

LOKALIZACE ZDROJŮ AKUSTICKÉ EMISE

Číslo zprávy : 123VP

Číslo kopie :

Vedoucí grantu : Ing. František VALEŠ, CSc.

Ředitel institutu : Ing. Miroslav BALDA, DrSc.

Plzeň, duben 1994

ROZDĚLOVNÍK :

- | | |
|------------------|-------------------------------------|
| Výtisk číslo : 1 | archivní výtisk |
| 2 | knihovna ITS ZČU |
| 3 | Ing. Petr HORA, CSc., ITS ZČU |
| 4 | Ing. Jiří PÁTEK, ITS ZČU |
| 5 | Ing. František VALEŠ, CSc., ITS ZČU |

OBSAH

ÚVOD	4
METODA TRIANGULACE	5
Princip lokalizace	5
Výsledky měření	8
Možné zdroje chyb	8
Přesnost výsledné lokalizace	12
Stanovení doby příchodu signálu AE	16
METODA REKONSTRUKCE ZDROJŮ ZE ZPĚTNÝCH PROJEKČÍ	17
Problém rekonstrukce	17
Rekonstrukce v \mathbf{R}^2	19
Rekonstrukce v \mathbf{R}^3	30
Rekonstrukce využívající signály všech párů snímačů	31
Odstup signálu od šumu	34
Numerické zpracování algoritmu	35
Tomografická filtrace	37
Simulace	43
Dodatek A: Algoritmus lokalizace	59
Dodatek B: Výpis lokalizačního programu	62
Dodatek C: Korelace ve frekvenční oblasti	65
Dodatek D: Generování šumu	68
LITERATURA	70

ÚVOD

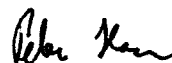
Tato zpráva vznikla na základě podpory grantu AV ČR 27007 *Využití napěťových vln pro diagnostiku porušování*, který se řešil v ITS ZČU (společné pracoviště ZČU a AV ČR) v Plzni v letech 1991 až 1993. Součástí tohoto grantu byl i vývoj nových metod zpracování signálů akustické emise.

Poněvadž jednou z nejužitečnějších vlastností monitorování akustické emise je možnost lokalizování zdroje akustické emise, soustředil se vývoj nových metod zpracování signálů akustické emise na nové metody lokalizace zdrojů akustické emise.

Zpráva popisuje dvě různé metody lokalizace zdroje akustické emise; metodu triangulace (a její modifikaci) a metodu rekonstrukce zdrojů ze zpětných projekcí. Metoda triangulace je nejdéle používanou metodou; používala se již v době první světové války pro lokalizaci dělostřeleckých baterií. Její modifikovaná metoda nepoužívá pro stanovení doby příchodu příznaku překročení prahové úrovně signálu akustické emise, ale využívá okamžiku, kdy vzájemná korelace signálů ze snímačů nabývá maximální hodnoty. Metoda rekonstrukce zdrojů ze zpětných projekcí vyžaduje větší počet snímačů obklopujících oblast zdrojů a používá algoritmu filtrované zpětné projekce, který je podobný algoritmu používaném v tomografii. Obrazy zdroje mohou být obnoveny při mnohem menším odstupě signálu od šumu, než vyžadují klasické metody lokalizace zdroje (např. triangulace).

Zpráva si klade za hlavní cíl ozřejmit princip jednotlivých lokalizačních metod, poukázat na jejich výhody a nevýhody, rozebrat jednotlivé faktory ovlivňující přesnost lokalizace zdroje akustické emise a uvést základní pravidla pro lokalizační měření.

V Plzni 20.dubna 1994



METODA TRIANGULACE

Metoda triangulace, používaná pro lokalizaci zdroje akustické emise v současných aparaturách pro monitorování signálů akustické emise, je nejdéle používanou metodou; používala se již v době první světové války pro lokalizaci dělostřeleckých baterií.

Princip lokalizace

Signály akustické emise mohou být zhruba rozděleny do dvou skupin :

- a) výstřelová emise ("burst"), která je detekována jako klesající sinusovka a
- b) spojitá emise (podobající se bílému šumu).

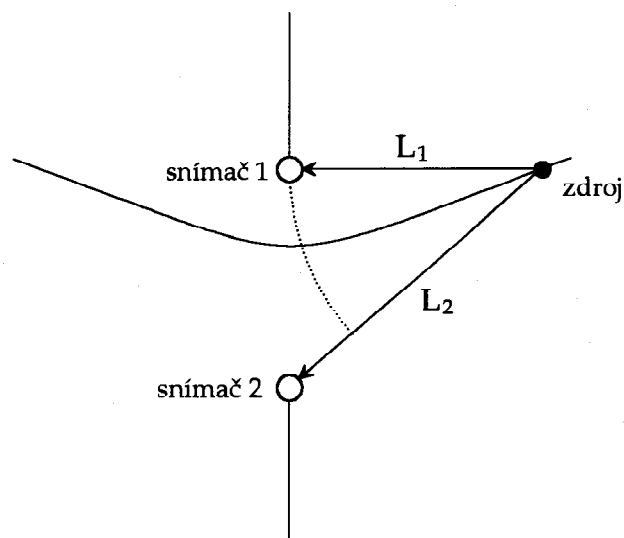
Lokalizace zdroje akustické emise je založena na měření relativních dob příchodů signálů akustické emise k několika snímačům a je tudíž omezena na aplikace, kde zdroje generují výstřelovou emisi. Mimoto se obvykle předpokládá, že je vlnová rychlost v celém prostředí stejná.

V jednorozměrném případě, kdy zdroj leží někde na úsečce spojující oba snímače, je umístění zdroje jednoznačně určeno rozdílem naměřených časů příchodů ke snímačům.

Ve dvojrozměrném případě (viz obr.1), kdy zdroj leží v nějakém bodě roviny, může být rozdíl vzdáleností, které projde vlna k páru snímačů, vypočten z naměřeného časového rozdílu :

$$\delta = \Delta t \cdot v$$

kde δ je rozdíl drah, v je vlnová rychlost a Δt je změřené časové zpoždění. Stejný časový rozdíl (δ) je získán, jestliže zdroj leží v libovolném bodě na hyperbole, jejíž ohniska jsou v místech snímačů.

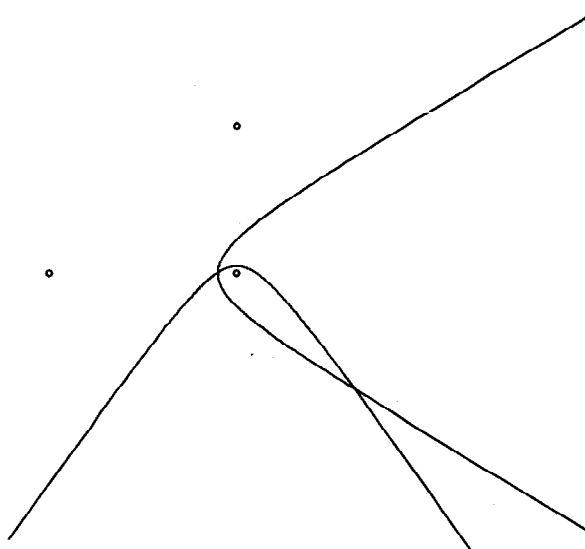


Obr.1 Signál akustické emise je detekován dvěma snímači v různých časech. Signálu z libovolného bodu na hyperbole bude naměřeno stejné časové zpoždění.

Použitím dalších snímačů mohou být souřadnice zdroje určeny z průsečíku hyperbol, které jsou určeny z naměřených časových rozdílů jiných párů snímačů. Obecně N snímačů poskytuje $N-1$ časových rozdílů a souřadnic. Tedy minimální počet snímačů pro lineární lokalizaci je dva, tři pro rovinnou a čtyři pro objemovou lokalizaci.

• Dvojznačnost

Je-li použito minimálního počtu snímačů, objeví se někdy dvojznačná řešení. V blízkosti každého snímače a "za" každým snímačem existuje jistá oblast, ve které se vyskytují dvě řešení (viz obr.2). Obě řešení mají fyzikální smysl a pro rozřešení dvojznačnosti musí být přibrána dodatečná informace; např. změřením časového zpoždění pro dodatečný snímač a porovnáním této hodnoty s vypočtenými hodnotami umístění zdrojů.



Obr.2 Ilustrace dvojznačného řešení

• Numerické řešení

Algoritmus používaný k výpočtu lokalizace zdroje může být založen na několika metodách. Numerická řešení mohou být vypočtena iterativními metodami, tabulkami nebo přímým matematickým řešením. Tabulky mají omezenou rozlišovací schopnost a jak tabulky tak iterační metody nemohou být obecně použity pro správné rozřešení situace s dvojznačným řešením. Vhodné a přesné matematické algoritmy pro rovinný a sférický povrch byly publikovány v [TOB76] a [AST78]. Iterační algoritmus pro lokalizaci zdroje ve trojrozměrném prostředí byl popsán v [BLA]. Tobias [TOB76] dále diskutoval dvojznačnost a rozlišovací schopnost pro tři různá pole snímačů.

Algoritmus lokalizace je uveden v Dodatku A. Program, který je založen na tomto algoritmu, vypočítává umístění zdroje z naměřených relativních časů příchoďů signálů akustické emise k jednotlivým snímačům. Geometrie snímačů je libovolná. Dojde-li ke dvojznačnosti, je použito informací ze čtvrtého snímače. Výpis lokalizačního programu pro IBM PC je uveden v Dodatku B.

Výsledky měření

V literatuře je často publikováno, že experimenty s lokalizací zdrojů akustické emise poskytují chabé výsledky. Někteří badatelé neoficiálně udávají, že pouze 2%, nebo ještě méně, detekovaných událostí skončilo přesnou lokalizací zdroje nebo že přesnost byla o hodně menší než přesnost získaná pomocí kalibračních metod před experimentem.

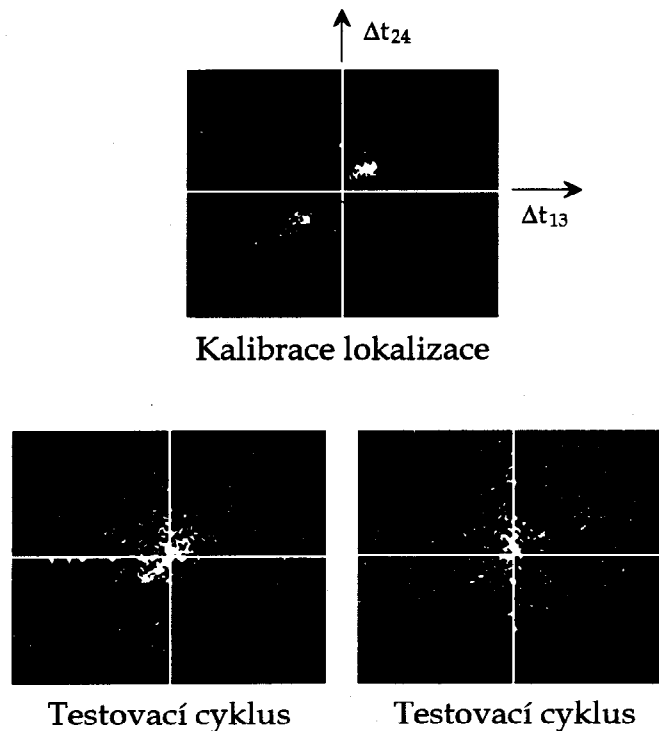
Obr.3 znázorňuje výsledky z pečlivě řízeného experimentu, u kterého se očekávaná akustická emise potvrdila, ale lokalizace zdroje již byla méně úspěšná. Obata [OBA78] prováděl řadu experimentů na válcové tlakové nádobě o průměru 1m a délce 4,3m, ve které byl vyroben 400mm dlouhý axiální defekt do hloubky 60% tloušťky stěny nádoby. Nádobu byla několikrát tlakována až do destrukce. Relativní časy příchodů ze snímačů na diagonále (čtvercové pole) byly přímo vykreslovány (viz obr.3). Během kalibrace byly vybudeny oba konce umělého defektu a pozice zdrojů byly úspěšně určeny. Avšak když byla nádoba tlakována, vykazovala lokalizace reálných zdrojů akustické emise značný rozptyl. Výsledky vykazují vyšší hustotu vypočtených zdrojů okolo místa umělého defektu, ale dochází zde k většímu rozptylu, než by se v tomto jednoduchém případě očekávalo.

Možné zdroje chyb

Výpočet lokalizace zdroje vyžaduje znalost geometrie konstrukce, pozic snímačů, vlnové rychlosti a naměřených relativních dob příchodů. Nyní si probereme, do jaké míry ten který faktor ovlivňuje výslednou přesnost.

• Geometrie konstrukce

Předpokládá se dosti jednoduchá geometrie konstrukce, tj. přímá cesta uražená vlnou od epicentra zdroje (projekce místa zdroje na povrch konstrukce) ke snímačům je nepřerušena. Tento předpoklad je uplatňován v následujících diskusích.



Obr.3 Příklad experimentu, kdy bylo přímo vykreslováno časové zpoždění naměřené čtvercovým polem snímačů. Kalibrační lokalizace používající umělého zdroje byla přesná. Lokalizace akustické emise během následných testovacích cyklů byla více roztýlena (podle [OBA78]).

• Rozmístění snímačů

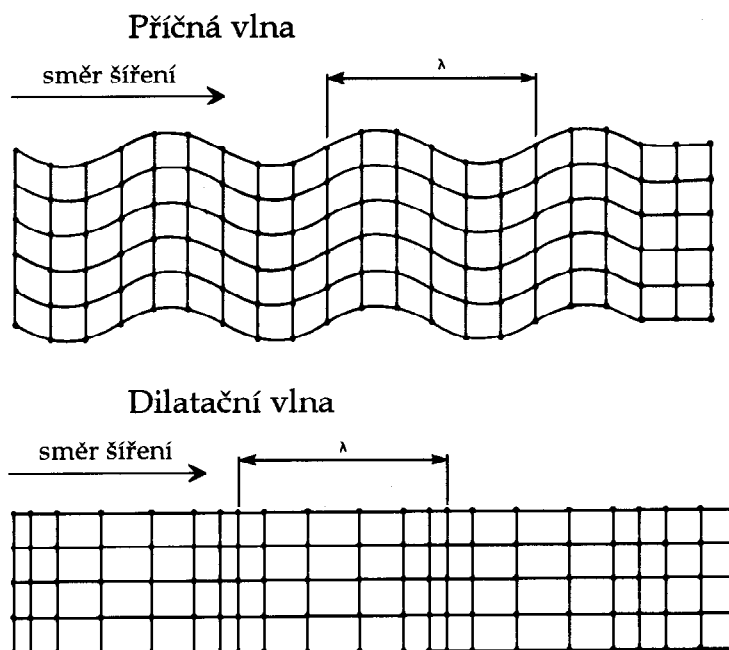
Přesnost lokalizace je omezena aktivní plochou snímače. Pro mnoho typů snímačů je efektivní průměr přibližně 20mm, ačkoliv některé typy jsou využitelné s aktivním průměrem okolo 3mm (např. B&K Broad-Band Transducer Type 8312). Navíc uspořádání snímačů v poli určuje přesnost lokalizace (prostorové rozlišení) a rozsah oblastí, kde se může vyskytnout dvojznačné řešení.

• Rychlost šíření

Šíření elastických vln v pevném tělese je velice složitý problém. V neohraničeném pevném tělese se elastické vlny šíří ve dvou základních formách, jako vlny dilatační a ekvivolumetrické (viz obr.4). Obě vlny mají svou charakteristickou rychlost, která může být vypočtena z hustoty a elastických konstant [KAY66]. Posuvy při dilatační

vně jsou rovnoběžné se směrem šíření vlny. Ekvivolumetrické vlny, které se nešíří v plynech a kapalinách, jsou charakterizovány posuvy kolmo na směr šíření vlny.

V poloprostoru (jedna hraniční plocha) se v oblasti při povrchu šíří tzv. Rayleighova vlna (kombinace dilatačních a ekvivolumetrických vln). Rychlost těchto vln může být vypočtena z materiálových konstant a obecně je nižší než rychlost dilatační i ekvivolumetrické vlny.



Obr.4 Dva základní typy vln v neomezeném pevném tělese

V prostředí ohraničeném dvěma povrchy (deska) se vytvářejí dva základní vlnové módy: symetrický a asymetrický. V osové rovině desky jsou posuvy pro symetrický mód podélné a pro asymetrický mód příčné. Jak se zkracuje vlnová délka relativně k tloušťce desky, mohou se uplatnit vyšší řady symetrických a asymetrických módů, přičemž každý má svou charakteristickou grupovou rychlost, což vyvolává disperzi (vlnové složky o různé frekvenci putují deskou různými rychlostmi). V důsledku disperze se impulsní signály roztáhnou v čase.

Různé zdroje generují různé kombinace módů, které podléhají různému útlumu materiálu. Dále když puls prochází přes rozhraní, jakým je např. svár nebo změna tloušťky desky, dojde ke změně módů. Ačkoliv snímač, který je umístěn blízko takové hranice může být použit pro lokalizaci zdroje na té či oné straně hranice, je

obvykle nezbytné uvažovat různé rychlosti šíření pro každou část desky. Navíc může docházet k separaci některých vlnových módů snímačem a následnými zesilovači. Výběr frekvenčního pásma a tloušťky desky může podstatně ovlivnit efektivní vlnovou rychlost.

• Doba příchodu

Chyby měření doby příchodu ke snímači jsou převážně způsobené disperzí. Mohou se však objevit druhotné problémy vyvolané fázovými nejistotami a superpozicí vícenásobných událostí.

1. Disperze

Doba příchodu signálu akustické emise je v lokalizačních aparaturách určena okamžikem, kdy signál překročí nastavenou prahovou úroveň. Pro výpočet lokalizace je třeba znát mód vlny, při kterém došlo k překročení prahové úrovně, neboť jednotlivé módy se šíří různými rychlostmi.

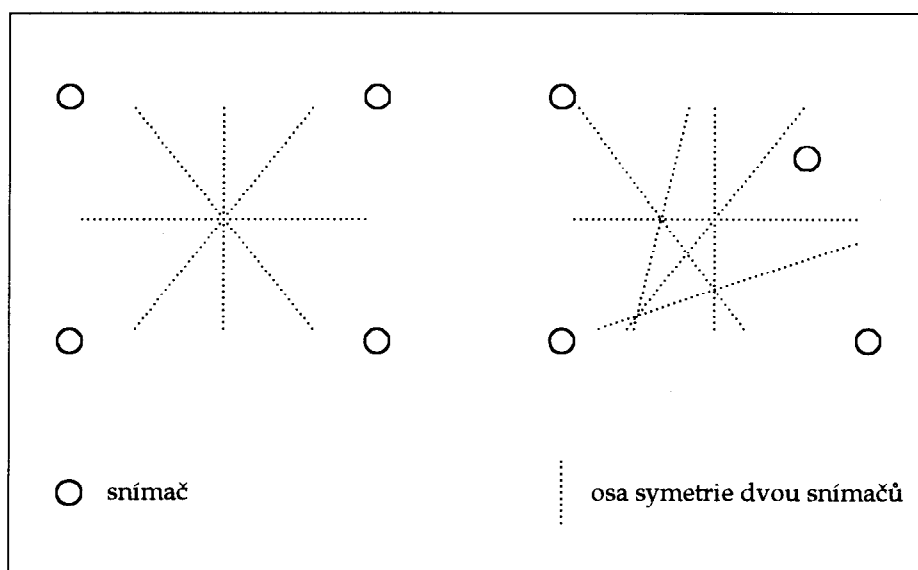
2. Druhotné problémy

Kromě problému určení aktuálního módu vlny vyvstávají dále potíže vyvolané fázovou nejistotou a superpozicí vícenásobných událostí. Poněvadž fáze zdroje není známa, bude vždy existovat nějaká nejistota i při jinak ideálních podmínkách. Pro snímač s rezonančním kmitočtem 200kHz činí asi $3\mu\text{s}$ neboli 10 až 15mm.

Elektromagnetická interference může být minimalizována užitím vhodných přístrojů, avšak úplně ji eliminovat nelze. Jsou-li signály náchylné ke spouštění několika kanálů najednou, měly by být snímače rozmístěny v takovém poli, které nemůže být najednou spuštěno reálným zdrojem akustické emise. Obdélníkové pole na obr.5 má více os symetrie; událost, která se objeví uprostřed tohoto pole, spustí všechny čtyři kanály najednou. Posuneme-li jeden ze snímačů, vícenásobné symetrii se vyhneme a zdroj akustické emise nemůže spustit všechny kanály najednou. Lokalizační program potom může snadno rozpoznat a vyhodit většinu falešných zdrojů vyvolaných elektromagnetickou interferencí.

V praxi nemusí signály spouštějící různé kanály pocházet od stejné události. Tato falešná data nemusí vést k lokalizaci vůbec nebo vedou k lokalizaci, která bude

téměř jistě chybná. Pravděpodobnost, že se vyskytnou data tohoto typu, závisí na poměru mezi četností emisních událostí a dobou, po kterou se šíří signál od jednoho zdroje emise k druhému nebo ke snímači. Jestliže je četnost emisních událostí vysoká, vzdálenost mezi snímači musí být omezena nebo musí být zvýšena prahová úroveň detekce (tj. úroveň spouštění), aby se četnost emisních událostí redukovala.



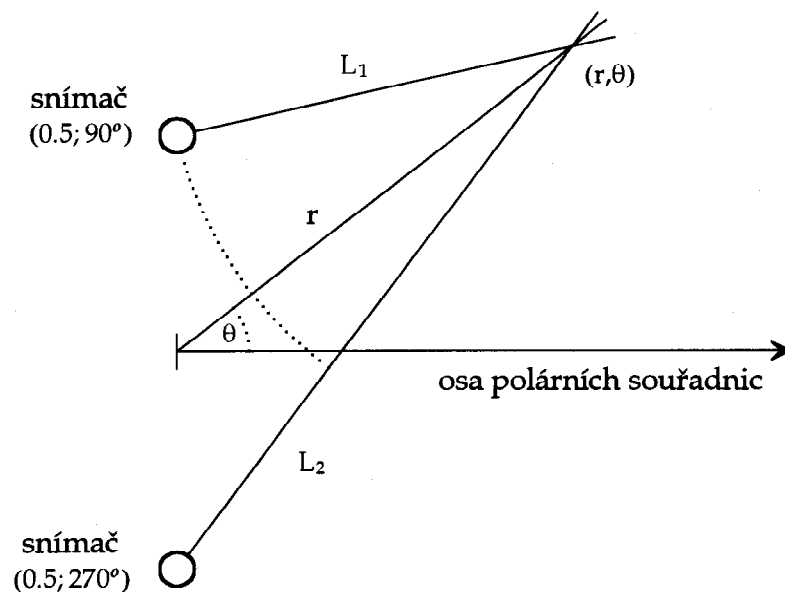
Obr.5 Symetrie pole snímačů :

- a) Obdélníkové pole má vícenásobnou symetrii
a událost v centru pole spustí všechny kanály najednou
- b) Tento jev může být odstraněn přemístěním jednoho snímače

Přesnost výsledné lokalizace

Chyby v měření relativních dob příchodů ovlivní výpočty lokalizace zdroje složitým způsobem. Vliv těchto chyb může být zjednodušeně zkoumán na příkladu páru snímačů umístěných, jak je znázorněno na obr.6. Souřadnice snímačů jsou $[0,5;90^\circ]$ resp. $[0,5;270^\circ]$, tedy vzdálenost snímačů je jednotková. Z naměřeného časového zpoždění (Δt) může být vypočten dráhový rozdíl (δ)

$$\delta = \Delta t \cdot v, \tag{1}$$



Obr.6 Pár snímačů s jednotkovou roztečí umístěných v polárních souřadnicích $[0,5;90^\circ]$ a $[0,5;270^\circ]$

Polární souřadnice zdroje $[r;\theta]$ musí splňovat rovnici hyperboly

$$r = \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{1 - \delta^2}{\sin^2(\theta) - \delta^2}} \quad (2)$$

nebo ekvivalentní vztah

$$\sin(\theta) = \frac{\delta}{2r} \sqrt{1 - \delta^2 + 4r^2} \quad (3)$$

Obě rovnice definují hyperbolu, která má ohniska v místech snímačů.

Derivací těchto rovnic podle δ dostaneme

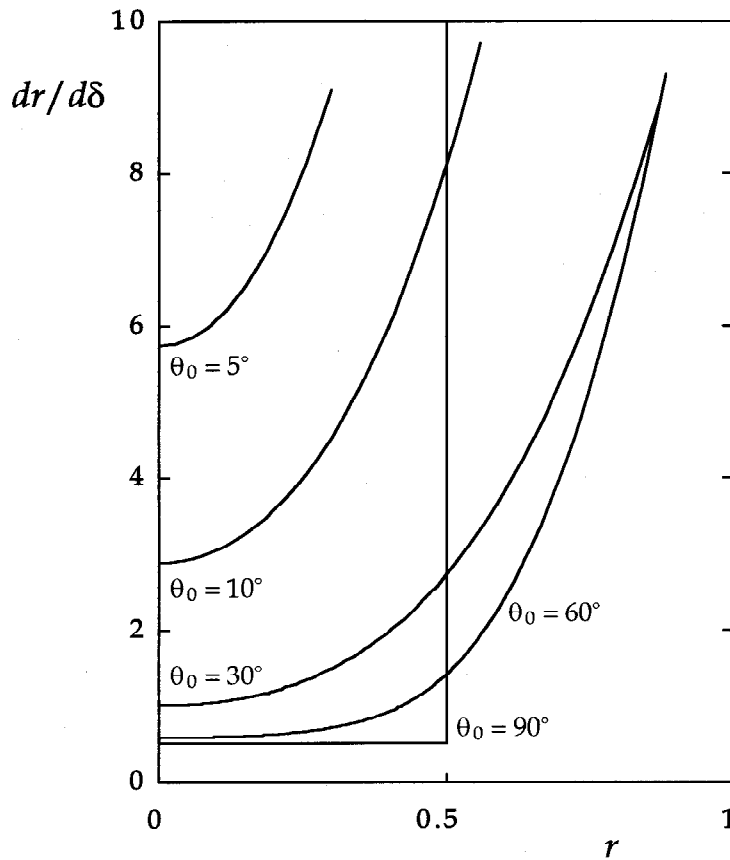
$$\frac{dr}{d\delta} = \frac{\delta^4 + (1 - 2\delta^2)\sin^2(\theta)}{2\sqrt{(\sin^2(\theta) - \delta^2)^3(1 - \delta^2)}} \quad (4)$$

resp.

$$\frac{d\theta}{d\delta} = \frac{1 - 2\delta^2 + 4r^2}{\sqrt{(1 - \delta^2 + 4r^2)(4r^2 - \delta^2)(1 - \delta^2)}} \quad (5)$$

Pomocí rovnice (4) a (5) může být vykreslena přesnost určení pozice zdroje v závislosti na r resp. θ .

Obr.7 znázorňuje křivky $dr/d\delta$ v závislosti na r pro několik hodnot θ , tj. uvažujeme-li směr θ za známý, křivky nám znázorňují, jak přesně může být určena vzdálenost r ke zdroji. Z obrázku je patrné, že je přesnost dobrá pro poloměr dosahující až ke snímačům (až na oblast úhlů kolem nuly). Mími tuto oblast chyba rychle narůstá. Je zřejmé, že přesnost je největší v bodě uprostřed snímačů. Křivky ilustrují případ pro konstantní přesnost v Δt a správný předpoklad vlnové rychlosti.

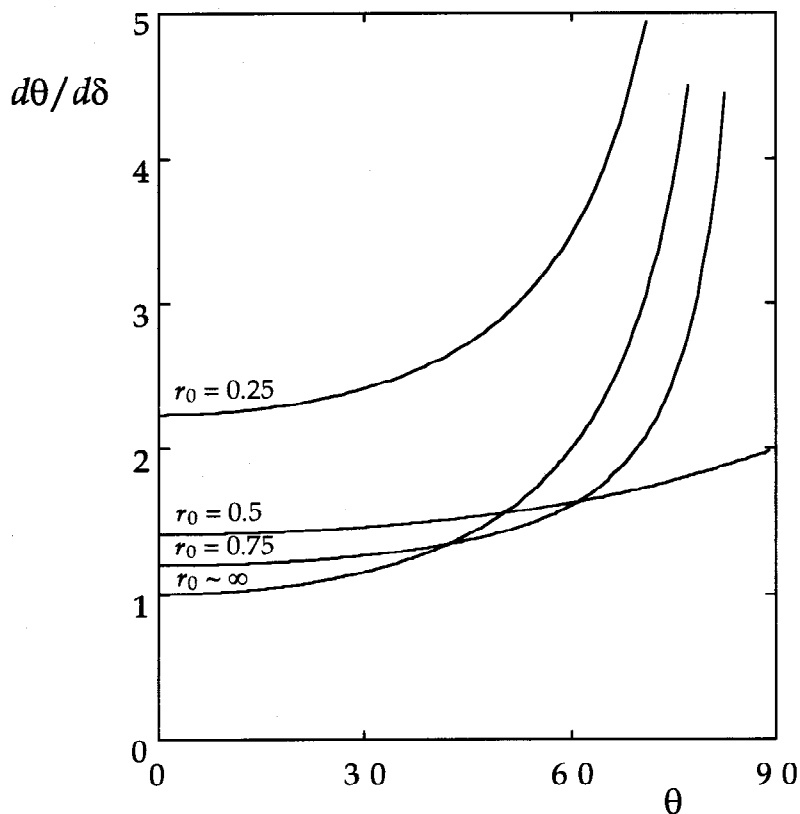


Obr.7 Přesnost vzdálenosti (r) pro známý směr (θ). $dr/d\delta$ je vykresleno jako funkce r pro různé hodnoty parametru θ .

Obr.8 znázorňuje křivky $d\theta/d\delta$ v závislosti na θ pro několik hodnot r , tj. uvažujeme-li vzdálenost r za známou, křivky nám znázorňují, jak přesně může být

určen směr θ ke zdroji. Směrová přesnost je dobrá a obecně nezávisí podstatně na vzdálenosti od počátku (až na oblast kolem spojnice snímačů).

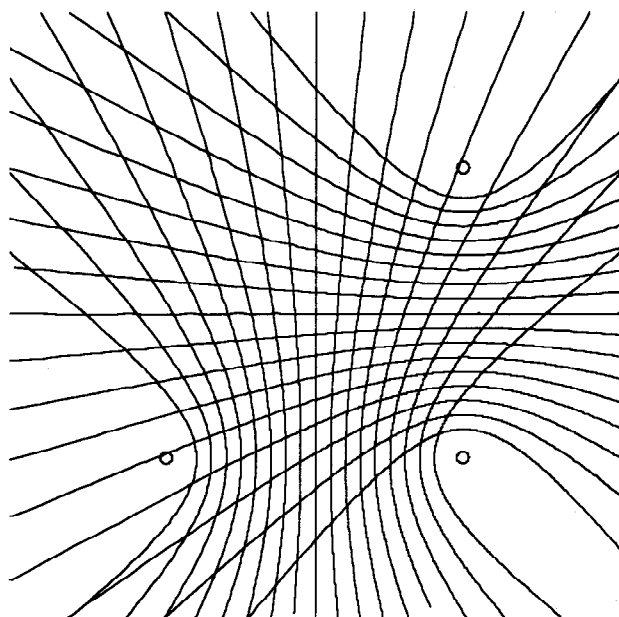
Oba obrázky potvrzují, že existují velké změny v prostorové rozlišitelnosti. V praxi to znamená, že algoritmy lokalizace zdroje založené na iteračních metodách nebo tabulkách mohou vést ke značným problémům (numerická nestabilita). Dále můžeme usuzovat, že pár snímačů nemůže přesně lokalizovat zdroj, který se nalézá blízko snímače popřípadě leží "za" snímačem.



Obr.8 Přesnost směru (θ) pro známou vzdálenost (r). $d\theta/d\delta$ je vykresleno jako funkce θ pro různé hodnoty parametru r .

Na obr.9 je znázorněno pole tří snímačů, do kterého jsou zakresleny hyperboly pro konstantní hodnoty δ . Z tvaru a velikosti oblastí mezi průsečíky hyperbol lze usuzovat na přesnost v tom kterém místě. Čím je oblast menší a čím více se tvarem blíží obdélníku (hyperboly se protínají pod pravým úhlem), tím je lokalizace

v daném místě přesnější. Závěrem lze říci, že vysokou přesnost lokalizace lze dosáhnout pouze uprostřed oblasti vymezené snímači.



Obr.9 Pole tří snímačů, do kterého jsou zakresleny hyperboly pro konstantní hodnoty δ .

Stanovení doby příchodu signálu AE

Jak již bylo řečeno v kapitole o možných zdrojích chyb lokalizace, je doba příchodu signálu akustické emise v lokalizačních aparaturách většinou určena okamžikem, kdy signál překročí nastavenou prahovou úroveň. Jinou možností, jak určit časové rozdíly mezi okamžiky příchodů signálu AE k jednotlivým snímačům, je využít vzájemné korelace signálů. Tento způsob je časově velice náročný a je proto vhodný především pro laboratorní použití při měření umělých zdrojů v prostředí s minimem šumu.

METODA REKONSTRUKCE ZDROJŮ ZE ZPĚTNÝCH PROJEKČÍ

V článku [NOR87] je popsán nový přístup k rekonstrukci obrazů intenzit rozložení náhodných zdrojů. Tato technika vyžaduje větší počet snímačů obklopujících oblast zdrojů a používá algoritmu filtrované zpětné projekce, který je podobný algoritmu používaném v tomografii. Před zpětnou projekcí jsou signály z párů snímačů vzájemně korelovány. Odvodíme aperturovou funkci algoritmu rekonstrukce zdroje pro náhodné a prostorově nekoherentní zdroje. Za těchto podmínek je odhad rekonstruovaného obrazu úměrný intenzitě zdroje. Mimoto obrazy zdroje mohou být obnoveny při mnohem menším odstupu signálu od šumu, než vyžadují klasické metody lokalizace zdroje (např. triangulace).

Problém rekonstrukce

Pro jednoduchost uvádíme kompletní analýzu a numerické simulace pro dvojrozměrný inverzní problém. Pro trojrozměrný případ jsou uvedeny pouze výsledky.

U dvojrozměrného problému předpokládáme, že je vyzařování zaznamenáváno snímači na obvodu kružnice obklopující oblast zdroje. Předpoklad rozmístění snímačů na kružnici není nutný, ale umožňuje nám odvodit explicitní výraz pro aperturovou funkci. Dále je vhodné předpokládat, že dvojrozměrná oblast zdroje a kruhové pole snímačů je vloženo do trojrozměrného prostředí. To nám umožňuje použít Greenovu funkci v \mathbf{R}^3 , jejíž tvar je jednodušší než tvar odpovídající Greenově funkci v \mathbf{R}^2 . V trojrozměrné verzi problému jsou snímače na kružnici nahrazeny snímači na kulové ploše obklopující oblast zdroje.

Pro jednoduchost je nutné omezit naši analýzu na náhodné zdroje, které jsou prostorově nekoherentní, tj. kde vyzařování vysílané z jednotlivých bodů zdroje je nekorelované. Zdroje, které mohou být považovány za náhodné a prostorově nekoherentní, se v přírodě vyskytují poměrně často. V optice jsou takovými zdroji např. teplotní zdroj nebo černé těleso. V ultrazvukové oblasti někdy splňují předpoklady náhodnosti a prostorové nekoherence zdroje akustické emise pocházející od

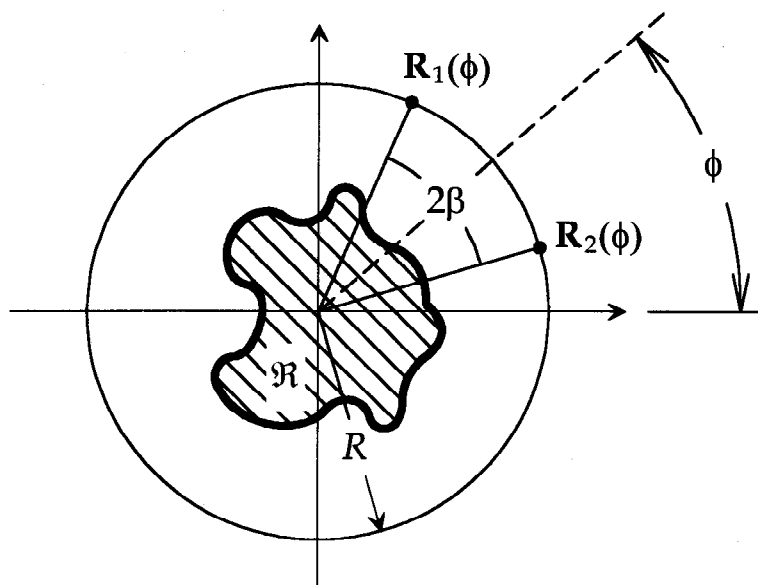
mikrotrhlin nebo některých transformací materiálu. Za jistých podmínek také seismické zdroje přibližně vyhovují těmto požadavkům. Ačkoliv žádný reálný zdroj nevykazuje úplnou prostorovou nekoherenci, navrhovaný odhad obrazu zdroje by měl poskytovat dobré výsledky, jestliže je vzdálenost korelace zdroje menší než nejkratší vlnová délka obsažená v záření. To je proto, že rozlišovací schopnost rekonstrukční metody je omezena hlavně šířkou pásma vyzařování. V případě, že vzdálenost korelace zdroje překračuje teoretickou rozlišovací schopnost rekonstrukční techniky, budou obrazy zdroje trpět některými degradacemi kvality obrazu např. zvětšení chyb nebo zvýšení šumu pozadí. Jedním z případů, kde je porušen předpoklad prostorové nekoherence, jsou naše simulace.

Rekonstrukční technika je dále založena na předpokladu, že jednotlivé elementární zdroje vyzařují izotropně. Jestliže např. uvažujeme zdroj akustické emise vyvolaný mikrotrhlinou, elastické vlny vytvořené individuálními mikroskopickými událostmi se obecně šíří anizotropně. Avšak za předpokladu, že je mnoho takových náhodně orientovaných událostí obsaženo uvnitř objemu, jehož rozměry jsou srovnatelné nebo menší než nejmenší vyzařovaná vlnová délka, budou se zdrojové elementy tohoto charakteristického rozměru chovat izotropně. Podmínka izotropie bude převládat, třebaže základní mikroskopické události se šíří anizotropně. Podobná argumentace by mohla být udělána pro případ některých seismických zdrojů.

V následujících kapitolách odvodíme vztahy pro rekonstrukci rozložení intenzity zdroje, které se pro dvojrozměrný prostor matematicky podobají známému konvolučnímu algoritmu zpětné projekce používaném v rentgenovské tomografii. V našem problému je veličinou, se kterou je provedena operace zpětné projekce pro získání rekonstrukce intenzity zdroje, vzájemná korelace signálů získaných ze snímačů, které jsou rozmístěny na kružnici proti sobě. Výstup této operace vzájemné korelace je filtrován přenosovou funkcí, která je totožná s přenosovou funkcí v klasickém konvolučním algoritmu zpětné projekce. Filtrovaná korelační funkce je potom přetransformována do obrazového prostoru.

Rekonstrukce v \mathbb{R}^2

Uvažujme dvojrozměrný zdroj nacházející se v kruhové oblasti o poloměru R a vložený do trojrozměrného prostředí. Zdroj emituje záření, které je vzorkováno ve všech bodech obvodu kružnice uzavírající oblast zdroje (obr. 10).



Obr.10 Signály emitované z oblasti zdroje \mathfrak{R} jsou nahrány v bodech $\mathbf{R}_1(\phi)$ a $\mathbf{R}_2(\phi)$ umístěné na kružnici o poloměru R . Polární souřadnice $\mathbf{R}_1(\phi)$ resp. jsou $(R, \phi + \beta)$ resp. $(R, \phi - \beta)$, kde β je pevné a ϕ se mění mezi 0 a 2π .

Nechť \mathfrak{R} označuje oblast zdroje a \mathbf{r} je bod uvnitř této oblasti. Předpokládejme, že rozložení zdroje je statisticky charakterizováno časově i prostorově závislým náhodným procesem $\tilde{f}(\mathbf{r}, \bar{t})$ ($\bar{t} = t/c$, kde c je rychlost rozruchu). Nadále budeme symbol $\tilde{f}(\mathbf{r}, \bar{t})$ používat, jak k označení dílčí realizace náhodného procesu, tak k označení náhodného procesu samého.

Realizace zdroje $\tilde{f}(\mathbf{r}, \bar{t})$ vyvolá pole $\tilde{u}(\mathbf{r}, \bar{t})$, které bude splňovat vlnovou rovnici

$$\nabla^2 \tilde{u}(\mathbf{r}, \bar{t}) - \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} \tilde{u}(\mathbf{r}, \bar{t}) = -\tilde{f}(\mathbf{r}, \bar{t}) \quad . \quad (1)$$

Pole $\tilde{u}(\mathbf{r}, \bar{t})$ vyzařuje z oblasti zdroje \mathfrak{R} a je detekováno ve všech bodech ležících na obvodu uzavírající kružnice o poloměru R (obr.10).

Naším cílem je rekonstruovat statistickou strukturu náhodného procesu $\tilde{f}(\mathbf{r}, \bar{t})$ jako funkci \mathbf{r} na základě naměřeného náhodného procesu $\tilde{u}(\mathbf{R}, \bar{t})$, kde \mathbf{R} představuje body na obvodu uzavírající kružnice o poloměru R . Statistické vlastnosti náhodného procesu $\tilde{f}(\mathbf{r}, \bar{t})$ mohou být v časové oblasti vyjádřeny korelační funkcí

$$B_{\tilde{f}\tilde{f}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2) = E[\tilde{f}(\mathbf{r}_1, \bar{t}_1)\tilde{f}(\mathbf{r}_2, \bar{t}_2)] \quad ,$$

kde $E[\cdot]$ označuje střední hodnotu. Pro jednoduchost předpokládáme, že proces $\tilde{f}(\mathbf{r}, \bar{t})$ může být vzhledem k \bar{t} považován na intervalu pozorování přibližně za stacionární (proces je stacionární, je-li hustota pravděpodobnosti invariantní vzhledem k volbě počátku osy času), tj. můžeme psát

$$B_{\tilde{f}\tilde{f}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2) = B_{\tilde{f}\tilde{f}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \bar{t}_1 + \bar{\tau}, \bar{t}_2 + \bar{\tau}) \quad ,$$

kde $\bar{\tau}$ je libovolné číslo. Je zřejmé, že hodnota korelační funkce stacionárního náhodného procesu nezávisí na hodnotách \bar{t}_1, \bar{t}_2 , ale na jejich rozdílu, který označíme $\bar{\tau} = \bar{t}_1 - \bar{t}_2$, tj.

$$B_{\tilde{f}\tilde{f}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2) = B_{\tilde{f}\tilde{f}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \bar{t}_1 - \bar{t}_2) = B_{\tilde{f}\tilde{f}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \bar{\tau}) \quad . \quad (2)$$

Předpoklad stacionárnosti náhodného procesu nám umožňuje používat ekvivalentní popis procesu $\tilde{f}(\mathbf{r}, \bar{t})$ ve frekvenční oblasti, tj. spektrální výkonovou hustotu procesu $\tilde{f}(\mathbf{r}, \bar{t})$, kterou označíme $S_{\tilde{f}\tilde{f}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; k)$ a která je definována Fourierovou transformací korelační funkce $B_{\tilde{f}\tilde{f}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \bar{\tau})$ vzhledem k $\bar{\tau}$ (tzv. Wiener-Chinčinova věta)

$$S_{\tilde{f}\tilde{f}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; k) = F\{B_{\tilde{f}\tilde{f}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \bar{\tau})\} \quad , \quad (3)$$

kde $F\{\cdot\}$ označuje Fourierovu transformaci. Jestliže je zdroj prostorově nekoherentní, dostáváme pro rovnice (2) a (3) vyjádření

$$B_{\tilde{f}\tilde{f}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \bar{\tau}) = \tilde{F}(\mathbf{r}_1, \bar{\tau}) \cdot \delta^{(2)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad , \quad (4)$$

$$S_{\tilde{f}\tilde{f}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; k) = F(\mathbf{r}_1, k) \cdot \delta^{(2)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad ,$$

kde $\delta^{(2)}(\cdot)$ označuje dvojrozměrnou Diracovu funkci. $\tilde{F}(\mathbf{r}, \bar{\tau})$ je intenzita náhodného procesu $\tilde{f}(\mathbf{r}, \bar{t})$ a $F(\mathbf{r}, k)$ je Fourierova transformace $\tilde{F}(\mathbf{r}, \bar{\tau})$.

Dále provedeme transformaci vlnové rovnice (1) do frekvenční oblasti. Fourierovou transformací rovnice (1) vzhledem k \bar{t} dostaneme

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}, k) + k^2 u(\mathbf{r}, k) = -f(\mathbf{r}, k) \quad , \quad (5)$$

kde

$$f(\mathbf{r}, k) \equiv F\{\tilde{f}(\mathbf{r}, \bar{t})\}_k \quad ,$$

$$u(\mathbf{r}, k) \equiv F\{\tilde{u}(\mathbf{r}, \bar{t})\}_k \quad .$$

Naším cílem zde je rekonstruovat prostorovou závislost spektrální funkce intenzity $F(\mathbf{r}, k)$ dané rovnicí (4). Začneme odvozováním vztahu mezi $F(\mathbf{r}, k)$ a korelační funkcí náhodného procesu pole $\tilde{u}(\mathbf{r}, \bar{t})$:

$$B_{\tilde{u}\tilde{u}}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau}) = E[\tilde{u}(\mathbf{R}_1, \bar{t})\tilde{u}(\mathbf{R}_2, \bar{t} + \bar{\tau})] \quad , \quad (6)$$

kde \mathbf{R}_1 a \mathbf{R}_2 jsou dva body na obvodu uzavírající kružnice o poloměru R .

Dále provedeme odhad korelační funkce pomocí vzájemné korelace signálu $\tilde{u}(\mathbf{R}_1, \bar{t})$ s $\tilde{u}(\mathbf{R}_2, \bar{t})$, tj. vypočteme

$$\hat{B}_{\tilde{u}\tilde{u}}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau}) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}(\mathbf{R}_1, \bar{t})\tilde{u}(\mathbf{R}_2, \bar{t} + \bar{\tau}) d\bar{t} \quad , \quad (7)$$

kde $\hat{\quad}$ označuje odhad korelační funkce a kde T je konečný časový úsek. Připomeňme, že vztah (7) platí pro ergodické náhodné procesy pro $T \rightarrow \infty$. Fourierovou transformací rovnice (6) vzhledem k $\bar{\tau}$ dostaneme spektrální výkonovou hustotu

$$S_{uu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k) = F\{B_{\tilde{u}\tilde{u}}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau})\}_k \quad . \quad (8)$$

Spektrální výkonová hustota S_{uu} může být též vyjádřena vztahem

$$S_{uu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k) = E[u^*(\mathbf{R}_1, k)u(\mathbf{R}_2, k)] \quad , \quad (9)$$

kde $u(\mathbf{R}_1, k)$ a $u(\mathbf{R}_2, k)$ jsou Fourierovy transformace pole $\tilde{u}(\mathbf{R}_1, \bar{t})$ a $\tilde{u}(\mathbf{R}_2, \bar{t})$ a znak $*$ označuje komplexně sdruženou hodnotu. Vztah (9) lze odvodit dosazením vztahu (7) do vztahu (8) s předpokladem nulové hodnoty $\tilde{u}(\mathbf{R}_1, \bar{t})$ a $\tilde{u}(\mathbf{R}_2, \bar{t})$ mimo interval $\langle 0, T \rangle$.

Z vlnové rovnice (5) dostáváme pomocí Greenovy funkce $G(\mathbf{r}|\mathbf{R})$ vztah mezi $u(\mathbf{R}_1, k)$ resp. $u(\mathbf{R}_2, k)$ a zdrojem $f(\mathbf{r}, k)$:

$$u(\mathbf{R}_1, k) = \iint_{\mathbf{R}} G_k(\mathbf{r}|\mathbf{R}_1) f(\mathbf{r}, k) d^2\mathbf{r} \quad , \quad (10a)$$

$$u(\mathbf{R}_2, k) = \iint_{\mathbf{R}} G_k(\mathbf{r}|\mathbf{R}_2) f(\mathbf{r}, k) d^2\mathbf{r} \quad . \quad (10b)$$

Poznamenejme, že na $u(\mathbf{R}_1, k)$ a $u(\mathbf{R}_2, k)$ je třeba hledět jako na zvláštní realizace náhodných procesů, poněvadž $f(\mathbf{r}, k)$ v rovnicích (10a) a (10b) je jednou realizací zdrojového procesu. Jestliže je provedeno mnoho měření, provádíme násobení $u^*(\mathbf{R}_1, k)$ a $u(\mathbf{R}_2, k)$ pro každé měření (nebo korelujeme $\tilde{u}(\mathbf{R}_1, \bar{t})$ a $\tilde{u}(\mathbf{R}_2, \bar{t})$ v rovnici (7)) a potom průměrováním těchto realizací dostaneme při velkém počtu měření střední hodnotu (9).

Dosazením rovnice (10a) a (10b) do rovnice (9) dostaneme

$$S_{uu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k) = \iint_{\mathbf{R}} G_k^*(\mathbf{r}|\mathbf{R}_1) d^2\mathbf{r} \times \iint_{\mathbf{R}} G_k(\mathbf{r}'|\mathbf{R}_2) E[f^*(\mathbf{r}, k) f(\mathbf{r}', k)] d^2\mathbf{r}' \quad . \quad (11)$$

Korelační funkce zdroje je

$$E[f^*(\mathbf{r}, k) f(\mathbf{r}', k)] = S_{ff}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) = F(\mathbf{r}, k) \cdot \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (12)$$

podle vztahu (4). Dosadíme-li rovnici (12) do rovnice (11), dostaneme po úpravě

$$S_{uu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k) = \iint_{\mathbf{R}} F(\mathbf{r}, k) G_k^*(\mathbf{r}|\mathbf{R}_1) G_k(\mathbf{r}|\mathbf{R}_2) d^2\mathbf{r} \quad . \quad (13)$$

Budeme předpokládat, že zdroj je spektrálně čistý, tj.

$$F(\mathbf{r}, k) = F(\mathbf{r}) \cdot F(k) \quad ,$$

kde spektrální hustota intenzity zdroje $F(k)$ je známá v pásmu $(-k_c, k_c)$ a prostorová hustota intenzity zdroje $F(\mathbf{r})$ je neznámá. Spektrální hustota intenzity zdroje $F(k)$ může být odhadnuta přímo z výkonového spektra emitovaných signálů. Např. vložení poslední rovnice do rovnice (13) a substitucí $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1$, dostaneme

$$S_{uu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1; k) = A_0 F(k) \quad ,$$

kde

$$A_0 \equiv \iint_R \frac{F(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_1|^2} d^2\mathbf{r} \cong \frac{1}{R^2} \iint_R F(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} .$$

Za předpokladu $R \gg |\mathbf{r}|$, může být A_0 považováno za konstantu; v tom případě může být vyloučena jako nevýznamná multiplikativní konstanta.

Definováním

$$Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k) = S_{uu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k)/F(k) \quad ; \quad -k_c < k < k_c \quad (14)$$

nabude rovnice (13) tvaru

$$Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k) = \iint_R F(\mathbf{r}) G_k^*(\mathbf{r}|\mathbf{R}_1) G_k(\mathbf{r}|\mathbf{R}_2) d^2\mathbf{r} \quad (15)$$

pro $-k_c < k < k_c$.

Nyní filtrujeme korelační funkci $Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k)$ následovně

$$\tilde{Q}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau}) = \int_{-k_c}^{k_c} Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k) e^{ik\bar{\tau}} dk \quad (16)$$

Upozorňujeme na přítomnost faktoru $|k|$ v integrandu. Toto frekvenční váhování je stejné, jaké se používá v tradičním konvolučním algoritmu zpětné projekce.

Nyní navrhujeme vzorec (zpětnou projekci) pro rekonstrukci funkce intenzity zdroje $F(\mathbf{r})$ z filtrovaných korelovaných dat $\tilde{Q}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau})$. Tento vzorec později v krátkosti ověříme. Rekonstrukci funkce $F(\mathbf{r})$ označme $\hat{F}(\mathbf{r})$, potom

$$\hat{F}(\mathbf{r}) = \alpha_0 \int_0^{2\pi} \tilde{Q}[\mathbf{R}_1(\phi), \mathbf{R}_2(\phi); \bar{\tau}_{12}(\mathbf{r})] d\phi \quad (17)$$

kde

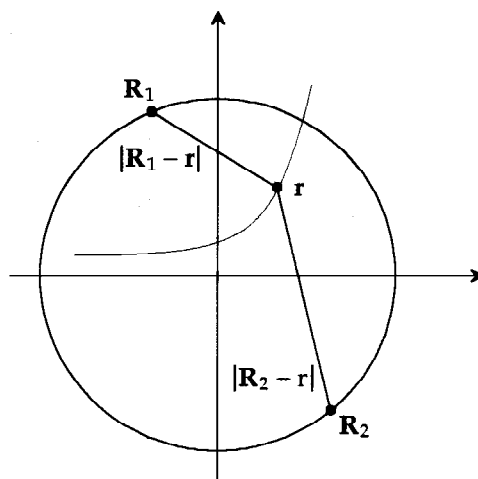
α_0 je konstanta, která bude určena později spolu s ověřením rekonstrukčního vzorce,

$$\bar{\tau}_{12}(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{R}_1(\phi)| - |\mathbf{r} - \mathbf{R}_2(\phi)| \quad (18)$$

a $\mathbf{R}_1(\phi)$ a $\mathbf{R}_2(\phi)$ jsou body na obvodu kružnice o poloměru R v úhlech $\phi + \beta$ a $\phi - \beta$, kde 2β je úhel vytvořený bodem \mathbf{R}_1 , počátkem a bodem \mathbf{R}_2 (obr.10). Během procesu

rekonstrukce zůstává úhel β konstantní, zatímco se úhel ϕ mění v rozsahu od 0 do 2π .

Vyšetřeme operaci prováděnou rovnicí (17) pro daný bod r . Pro pár přijímacích bodů $R_1(\phi)$ a $R_2(\phi)$ je velikost $\bar{\tau}_{12}(r)$ definována rovnicí (18); jde o rozdíl časových zpoždění (v jednotkách vzdálenosti) mezi r a prvním přijímacím bodem R_1 a mezi r a druhým přijímacím bodem R_2 . Místa bodů r definovaných rovnicí (18) pro pevné zpoždění $\bar{\tau}_{12}(r)$ tvoří hyperbolu, jejímiž ohnisky jsou body R_1 a R_2 (obr.11). Tj. rozdíl časových zpoždění pro body ležící podél této hyperbolické dráhy je stejný a roven $\bar{\tau}_{12}(r)$. Takto může být operace vzájemné korelace (rovnice (7)) interpretována jako křivkový integrál intenzity zdroje podél hyperbolické dráhy, jejíž časový rozdíl je $\bar{\tau} = \bar{t}_1 - \bar{t}_2$ a která má ohniska v bodech R_1 a R_2 . Rovnice (17) sčítá filtrované korelační hodnoty \tilde{Q} všech párů snímačů v bodech R_1 a R_2 , které odpovídají průsečíku hyperbol s bodem r (rekonstruovaný bod).



Obr. 11 Vzájemnou korelaci signálů z bodů R_1 a R_2 si můžeme představit jako křivkový integrál intenzity zdroje po hyperbolické cestě definované $\bar{\tau}_{12} = |R_1 - r| - |R_2 - r|$. Body R_1 a R_2 jsou ohniska hyperboly.

Operace definovaná rovnicí (17) a (18) je matematicky analogická zpětné projekci v rentgenovské rekonstrukční tomografii. Připomeňme, že v rentgenovské tomografii je za projekci považován soubor křivkových integrálů veličin, které se mají zobrazit, podél cest záření rentgenových paprsků. Filtrované projekce jsou

potom zpětně projektovány (zpětné znovurozdělení) podél stejných drah. Rekonstruovaný obraz je získán, když je tento proces proveden pro všechny paprsky a hodnoty zpětných projekcí jsou položeny do obrazového prostoru. Interpretace rovnice (17) je následující; \tilde{Q} je zpětně projektováno přes hyperbolické dráhy do obrazového prostoru. V rentgenovské tomografii jsou však dráhami zpětných projekcí všechny přímky protínající rekonstruovaný bod (tj. cesty všech rentgenových paprsků protínajících tento bod).

K ověření rovnice (17) nejprve vložíme rovnici (15) do rovnice (16) a za Greenovu funkci dosadíme

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{R}) = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} .$$

Tím dostaneme po změně pořadí integrace

$$\tilde{Q}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau}) = \iint_R d\mathbf{r}' F(\mathbf{r}') \int_{-k_c}^{k_c} dk |k| \times \frac{e^{ik(\bar{\tau}-|\mathbf{r}'-\mathbf{R}_1|+|\mathbf{r}'-\mathbf{R}_2|)}}{(4\pi)^2 |\mathbf{r}'-\mathbf{R}_1| |\mathbf{r}'-\mathbf{R}_2|} . \quad (19)$$

Dále dosadíme rovnici (19) do rovnice (17) a opět změním pořadí integrace

$$\hat{F}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha_0}{(4\pi)^2} \iint_R d^2\mathbf{r}' F(\mathbf{r}') \int_{-k_c}^{k_c} dk |k| \int_0^{2\pi} d\phi \times \frac{e^{ik(\bar{\tau}_{12}(\mathbf{r})-\bar{\tau}_{12}(\mathbf{r}'))}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{R}_1| |\mathbf{r}'-\mathbf{R}_2|} , \quad (20)$$

kde podle rovnice (18) $\bar{\tau}_{12}(\mathbf{r}) \equiv |\mathbf{r}-\mathbf{R}_1(\phi)| - |\mathbf{r}-\mathbf{R}_2(\phi)|$.

Pro $\bar{\tau}_{12}$ můžeme získat jednodušší vyjádření. Vyjádřeme \mathbf{r} , \mathbf{R}_1 a \mathbf{R}_2 v polárních souřadnicích (r, θ) , (R, θ_1) a (R, θ_2) , použitím kosinové věty (viz obr.10) potom dostaneme

$$|\mathbf{r}-\mathbf{R}_1| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_1)} .$$

Dále vytkneme R , provedeme rozvoj odmocniny v mocninnou řadu $(\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \dots \text{ pro } x \in \langle -1, 1 \rangle)$ a členy řady srovnáme vzestupně podle mocnin r/R

$$|\mathbf{r}-\mathbf{R}_1| = R \left[1 - \frac{r}{R} \cos(\theta - \theta_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \sin^2(\theta - \theta_2) + O \left(\frac{r}{R} \right)^3 \right] .$$

Při použití tohoto vztahu dostáváme pro $\bar{\tau}_{12}$ vyjádření

$$\bar{\tau}_{12}(\mathbf{r}) = r[\cos(\theta - \theta_2) - \cos(\theta - \theta_1)] + \frac{r^2}{2R}[\sin^2(\theta - \theta_1) - \sin^2(\theta - \theta_2)] + R\varepsilon(r), \quad (21)$$

kde chybový člen $\varepsilon(r)$ je řádu $(r/R)^3$. Podle obr.10 je $\theta_1 = \phi + \beta$ a $\theta_2 = \phi - \beta$. Dosazením těchto vztahů za θ_1 a θ_2 , dostáváme po trigonometrických úpravách vztahy

$$\cos(\theta - \theta_2) - \cos(\theta - \theta_1) = -2 \sin(\theta - \phi) \sin(\beta)$$

a

$$\sin^2(\theta - \theta_1) - \sin^2(\theta - \theta_2) = -\sin[2(\theta - \phi)] \sin(2\beta) .$$

Vložením těchto výsledků do rovnice (21) dostáváme

$$f_\varphi(\varphi) = \frac{r}{2\pi} \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \text{a} \quad f_\varphi(\varphi) = 0, \quad \varphi \notin (0, 2\pi)$$

$$\bar{\tau}_{12}(\mathbf{r}) = -2r \sin(\theta - \phi) \sin(\beta) - \frac{r^2}{2R} \sin[2(\theta - \phi)] \sin(2\beta) + R\varepsilon(r) . \quad (22)$$

Nyní vidíme, že je vhodné zvolit $\beta = \pi/2$; v tom případě se vztah (22) ještě dále zjednoduší

$$\bar{\tau}_{12}(\mathbf{r}) = -2r \sin(\theta - \phi) + R\varepsilon(r) . \quad (23)$$

Závislost $\bar{\tau}_{12}(\mathbf{r})$ je zobrazena na obr.12; obr.12a vzorec (18), obr.12b vzorec (23) a obr.12c rozdíl. Poznamenejme, že výběr $2\beta = 180^\circ$ znamená, že vzájemné korelace se provádějí mezi signály, které zaznamenaly protější snímače.

Člen váhující amplitudu $|\mathbf{r}' - \mathbf{R}_1| |\mathbf{r}' - \mathbf{R}_2|$ ve jmenovateli integrandu rovnice (20) se příliš neliší od R^2 , pokud je $|\mathbf{r}'|$ mnohem menší než R (poloměr uzavírající kružnice). Nahrazením tohoto členu R^2 a dosazením vztahu (23) do vztahu (20) dostáváme

$$\hat{F}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha_0}{(4\pi R)^2} \iint_R d^2\mathbf{r}' F(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') , \quad (24)$$

kde

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \int_{-k_c}^{k_c} dk |k| \int_0^{2\pi} d\phi \times e^{-i2k[r \sin(\theta - \phi) - r' \sin(\theta' - \phi)]} \times e^{-i2kR[g(r) - g(r')]} . \quad (25)$$

Pokud je $|r| \ll R$, je chybový člen $\varepsilon(r) - \varepsilon(r')$ zanedbatelný. Na druhé straně, je-li $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ velké, budou výsledné ostré (rychlé) oscilace integrandu klesat k malé hodnotě jádra $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, které, jak uvidíme dále, odpovídá chování $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, jsou-li \mathbf{r} a \mathbf{r}' daleko od sebe. Jak uvidíme později, $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ je aperturová funkce (point-spread function - PSF) zobrazovacího algoritmu; aperturová funkce může být interpretována jako obraz izolovaného bodového zdroje a celkově tak popisuje rozlišovací schopnost a přechodové vlastnosti (sidelobe response) lineárního invariantního zobrazovacího systému. Zanedbáním exponenciálního členu obsahující výraz $\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon(\mathbf{r}')$ nabude rovnice (25) tvaru

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \int_{-k_c}^{k_c} dk |k| \int_0^{2\pi} d\phi \times e^{-i2k[r \sin(\theta - \phi) - r' \sin(\theta' - \phi)]} \quad . \quad (26)$$

K vyhodnocení úhlové integrace v rovnici (26) je vhodné zavést následující přiřazení

$$r \sin(\theta - \phi) - r' \sin(\theta' - \phi) = X \sin(\phi - Y) \quad .$$

Rozložením a porovnáním koeficientů u $\sin(\phi)$ a $\cos(\phi)$ dostáváme

$$X = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

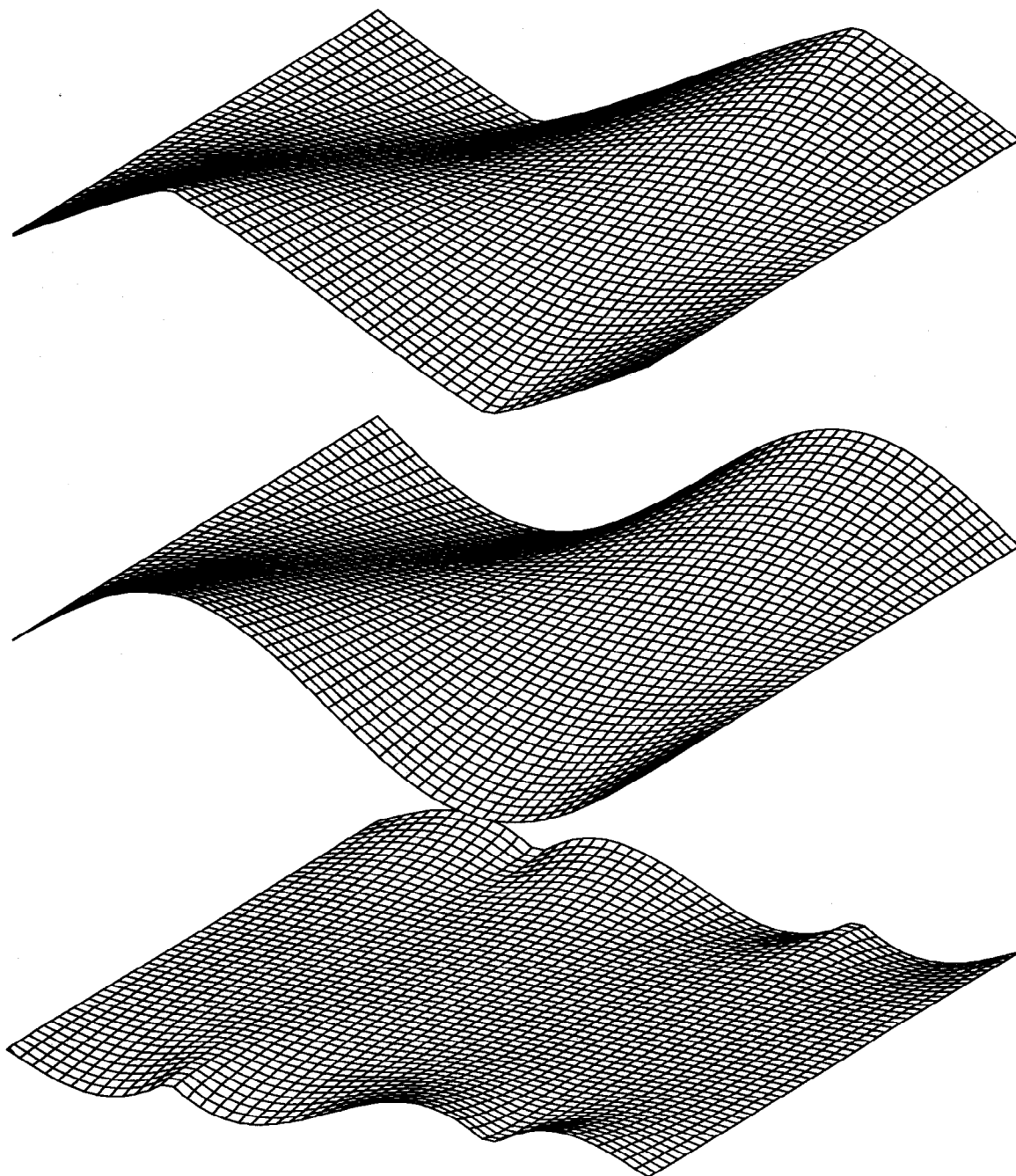
a

$$Y = \arctan \left(\frac{r \sin(\theta) - r' \sin(\theta')}{r \cos(\theta) - r' \cos(\theta')} \right) \quad .$$

Tím jsme převedli výpočet úhlového integrálu rovnice (26) na výpočet integrálu Parsevalova typu

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{-i2kX \sin(\phi - Y)} \quad ,$$

kde X a Y jsou konstanty. Výpočet tohoto integrálu je založen na skutečnosti, že se hodnota Parsevalova integrálu nezmění, jestliže ve funkci pod integrálním znakem posuneme počátek polárního úhlu. Posuneme-li tudíž počátek polárního úhlu o úhel $\alpha = Y + \pi/2$, dostaneme



Obr.12 Závislost $\bar{\tau}_{12}(\mathbf{r})$
nahore podle vzorce (18),
uprostřed podle vzorce (23) a
dole rozdíl.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i2kX \sin(\phi-\gamma)} &= \int_0^{2\pi} d\phi e^{i2kX \cos(\phi)} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \cos[2kX \cos(\phi)] + i \int_0^{2\pi} d\phi \sin[2kX \cos(\phi)] . \end{aligned}$$

Podle [KOR77] je první integrál roven $2\pi J_0[2kX]$ a druhý je roven nule.

Pro úhlovou integraci v rovnici (26) můžeme potom psát

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{i2kX \sin(\phi-\gamma)} = 2\pi J_0(2kX) ,$$

kde $J_0(\cdot)$ je Besselova funkce nultého řádu. Použijeme-li vztahu [KOR77]

$$\int dz z J_0(z) = z J_1(z) ,$$

rovnice (26) se dále zjednoduší

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv 2 \int_0^{k_c} dk k [2\pi J_0(2kX)] = 2\pi k_c \frac{J_1(2k_c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} , \quad (27)$$

kde $J_1(\cdot)$ je Besselova funkce prvního řádu. Funkce $J_1(x)/x$ je známa jako přechodová funkce čočky s kruhovou aperturou. Výraz uvedený ve vztahu (27) je aperturovou funkcí našeho rekonstrukčního algoritmu obrazu, tj. rekonstruovaný obraz bodového zdroje. Vidíme, že maximální rozlišení prováděné algoritmem závisí na mezní frekvenci k_c ; přibližná šířka této funkce v polovině maxima je $1.9/k_c$. Jak lze očekávat, prostorové rozlišení obrazu je omezeno šířkou pásma náhodných signálů emitovaných zdrojem. Jestliže λ_c je nejkratší vlnová délka odpovídající nejvyšším frekvenčním složkám těchto signálů (tj. k_c), potom je rozlišitelnost $\sim 0.3\lambda_c$.

Z rovnice (24) a (27) dostáváme

$$\hat{F}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha_0}{8R^2} \iint_{\mathcal{R}} d^2\mathbf{r}' F(\mathbf{r}') \left(\frac{k_c J_1(2k_c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\alpha_0}{8R^2} F(\mathbf{r}) ** \left(\frac{k_c J_1(2k_c |\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|} \right) , \quad (28)$$

kde ** označuje dvojrozměrnou konvoluci. Lze snadno ověřit, že

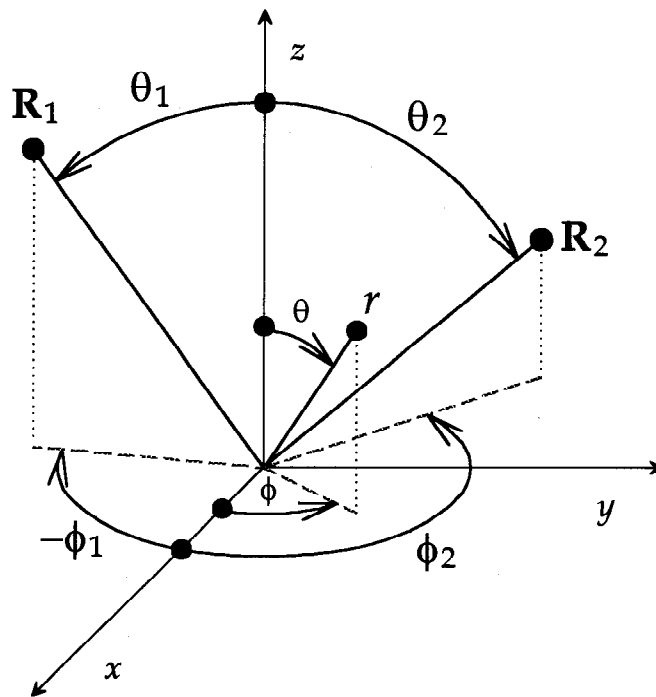
$$\lim_{k_c \rightarrow \infty} \left(\frac{k_c J_1(2k_c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (29)$$

kde $\delta^{(2)}(\cdot)$ je dvojrozměrná Diracova funkce. Zvolíme-li $\alpha_0 = 8R^2$, potom můžeme vzhledem k rovnici (28) a (29) psát

$$\lim_{k_c \rightarrow \infty} \hat{F}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}) \quad .$$

Rekonstrukce v \mathbb{R}^3

V trojrozměrném inverzním problému jsou přijímací elementy rozmístěny na kulové ploše, která obklopuje trojrozměrnou oblast zdroje (viz obr.13).



Obr.13 V trojrozměrném inverzním problému jsou přijímací elementy rozmístěny na kulové ploše, která obklopuje trojrozměrnou oblast zdroje.

Signály získané z protějšších přijímacích elementů rozmístěných na kulové ploše jsou vzájemně korelovány, potom je provedena Fourierova transformace a inverzní filtrace. Po provedení těchto operací získáme veličinu $\tilde{Q}^{(3D)}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k)$, což je veličina analogická veličině definované rovnicí (14). Vztahy pro trojrozměrný problém analogické vztahům (16) a (17)

$$\tilde{Q}^{(3D)}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau}) = \int_{-k_c}^{k_c} dk Q^{(3D)}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k) e^{ik\bar{\tau}} k^2 \quad (30)$$

a

$$\hat{F}(\mathbf{r}) = \frac{8R^2}{\pi} \iint d\Omega \tilde{Q}^{(3D)}[\mathbf{R}_1(\theta, \phi), \mathbf{R}_2(\theta, \phi); \bar{\tau}_{12}(\mathbf{r})] \quad , \quad (31)$$

kde $d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\phi$ je element prostorového úhlu a integrace se provádí přes celou kouli. Pro protější přijímací elementy platí $\mathbf{R}_2(\theta, \phi) = \mathbf{R}_1(\pi - \theta, \phi + \pi)$.

Vložením vztahu (30) do vztahu (31) získáme (postupujeme obdobně jako v předchozí části) trojrozměrnou analogii vztahu (28) :

$$\hat{F}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}) *** \left(\frac{2k_c}{\pi^2} \frac{j_1(2k_c|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|} \right) \quad ,$$

kde *** označuje trojrozměrnou konvoluci, $j_1(\cdot)$ je sférická Besselova funkce prvního řádu a veličina ve velkých závorkách je trojrozměrná aperturová funkce. Lze dokázat, že pro $k_c \rightarrow \infty$ přejde tato aperturová funkce v trojrozměrnou Diracovu funkci.

Rekonstrukce využívající signály všech párů snímačů

Vzorce uvedené v předchozích kapitolách jsou odvozeny za předpokladu izotropních a prostorově nekoherentních náhodných zdrojů při použití vzájemné korelace signálů zaznamenaných páry protilehlých snímačů rozmístěných na kružnici nebo kulové ploše. Nejsou-li tyto podmínky dodrženy, může být tato metoda stále ještě použita, vzniklý stupeň artefaktů a šumu pozadí závisí na povaze odchylky od ideálního případu.

V praxi nás cena, prostorové možnosti a složitost nutí omezit počet snímačů rozmístěných na uzavírající kružnici. Bohužel, je-li zpětná projekce provedena se signály obdrženými z malého počtu snímačů, je ideální aperturová funkce $J_1(x)/x$ postižena znatelnými degradacemi, především svých přechodových vlastností, což se projeví zvětšeným šumem pozadí. Tento šum pozadí můžeme do jisté míry redukovat tak, že místo vzájemné korelace a zpětné projekce signálů zaznamenaných

v $N/2$ párech protilehlých snímačů rozmístěných na kružnici použijeme vzájemnou korelaci a zpětnou projekci signálů ze všech $N(N-1)/2$ možných párů snímačů. Výslednou aperturovou funkci získáme z rovnice (17) integrací přes všechny snímače pro jednotlivé úhly β , které mohou nabývat hodnot od 0 do $\pi/2$. Vrátime-li se k rovnici (22), potom zanedbáním členů řádu r/R a vyšších dostáváme

$$\bar{\tau}_{12}(\mathbf{r}) = -2r \sin(\theta - \phi) \sin(\beta) \quad .$$

Pokračujeme-li s tímto výsledkem pro $\bar{\tau}_{12}(\mathbf{r})$ v odvozování aperturové funkce, dostáváme pro libovolné β

$$\frac{k_c}{\pi} \frac{J_1[2k_c|\mathbf{r}|\sin(\beta)]}{|\mathbf{r}|}$$

místo veličiny ve velkých závorkách ve vztahu (28). Tento výsledek, průměrovaný přes všechna β mezi 0 a $\pi/2$, může být napsán jako

$$\text{PSF} = \frac{k_c}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\beta \frac{J_1[2k_c|\mathbf{r}|\sin(\beta)]}{|\mathbf{r}|} w(\beta) \quad , \quad (32)$$

kde $w(\beta)$ je libovolná váhová funkce. Bohužel, pouze pro několik málo váhovacích funkcí $w(\beta)$ lze nalézt integrál ve vztahu (32) v uzavřeném tvaru.

Jednu ze tříd takovýchto váhovacích funkcí lze nalézt při použití prvního Soninova integrálu [KOR77], pro který platí :

$$\int_0^{\pi/2} d\beta J_\mu(z \sin(\beta)) \sin^{\mu+1}(\beta) \cos^{2\nu+1}(\beta) = \frac{2^\nu \Gamma(1+\nu)}{z^{\nu+1}} J_{\mu+\nu+1}(z) \quad .$$

V našem případě je $\mu = 1$, $z = 2k_c|\mathbf{r}|$ a ν je volitelné. Zvolíme-li $\nu = -1/2$ resp. $\nu = 0$ resp. $\nu = 1$; dostáváme postupně

$$w(\beta)_{-1/2} = \sin^2(\beta) \quad , \quad \text{PSF}_{-1/2} = \frac{J_{3/2}(2k_c|\mathbf{r}|)}{\sqrt{4k_c|\mathbf{r}|}} \quad ,$$

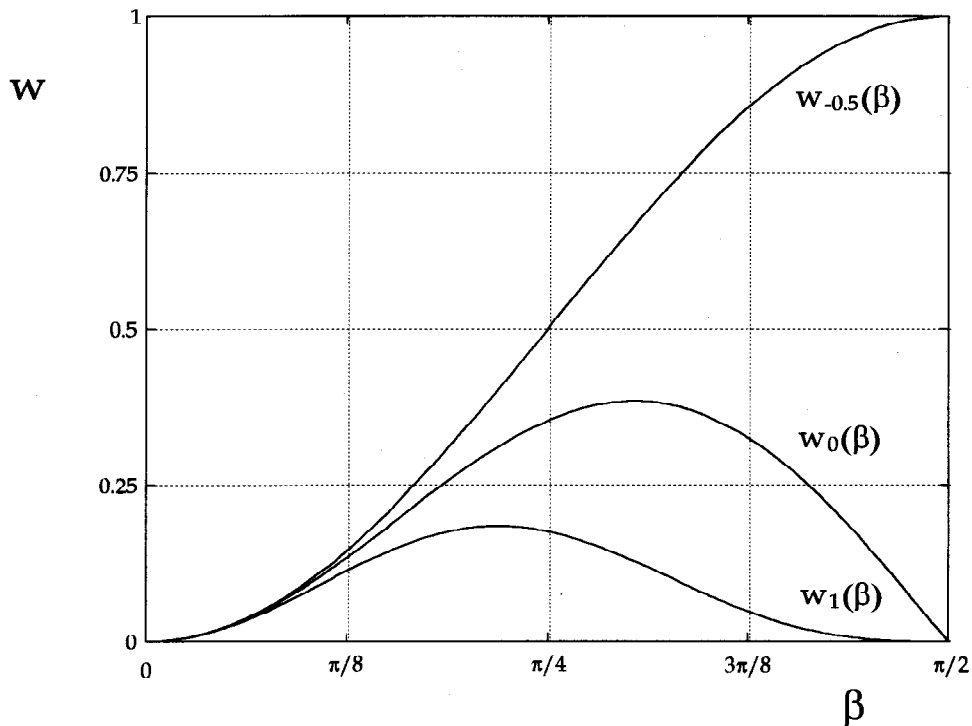
resp.

$$w(\beta)_0 = \sin^2(\beta) \cos(\beta) \quad , \quad \text{PSF}_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{J_2(2k_c|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|^2} \quad ,$$

resp.

$$w(\beta)_1 = \sin^2(\beta) \cos^3(\beta) \quad , \quad \text{PSF}_1 = \frac{1}{2\pi k_c} \frac{J_3(2k_c|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|^3} \quad .$$

Z výše uvedených váhovacích funkcí (viz obr.14) vyhovuje nejlépe váhovací funkce pro $\nu = 0$, tj. $w(\beta) = \sin^2(\beta) \cos(\beta)$. Aperturová funkce odpovídající této váhovací funkci má všechny žádoucí rysy dobře se chovající aperturové funkce včetně nízké přechodové odezvy a tendence přejít pro $k_c \rightarrow \infty$ ve dvojrozměrnou Diracovu funkci.



Obr.14 Váhovací funkce

Jedinou nevýhodou této váhovací funkce je skutečnost, že protilehlé snímače $\beta = \pi/2$ jsou váhovány nulou, ačkoliv jsme v předchozí části dokázali, že aperturová funkce protilehlých snímačů má tvar $J_1(x)/x$ (viz vztah (28)). Tento nedostatek se dá odstranit zavedením zobecněné váhovací funkce ve tvaru

$$w(\beta) = w_1 \sin^2(\beta) \cos(\beta) + w_2 \delta(\beta - \pi/2) \quad , \quad (33)$$

která zavádí aperturovou funkci, která se skládá z váhovaného součtu $J_1(x)/x$ a $J_2(x)/x^2$.

Odstup signálu od šumu

Tradičně používanou metodou k lokalizaci izolovaných zdrojů AE je metoda triangulace. Jestliže existuje mnoho zdrojů nebo jestliže je zdroj prostorově rozlehlý, může být triangulace obtížně proveditelná popřípadě ji nelze použít vůbec. Důležitou výhodou metody rekonstrukce zdroje oproti triangulaci je, za předpokladu výše uvedených podmínek, že tento odhad reprezentuje skutečnou zobrazovací metodu, která je úměrná intenzitě zdroje. Metoda je tedy schopna kvantitativně zmapovat intenzitu zdroje bez ohledu na rozlohu a prostorovou složitost rozložení zdroje.

Kromě schopnosti zobrazit složité zdroje je metoda schopna, na rozdíl od triangulace, detekovat zdroje při malém odstupu signálu od šumu. V triangulační metodě dojde k detekci, když přijímaný signál překročí prahovou úroveň, která je nastavena nad úrovní vstupního šumu. Existují dvě příčiny proč dochází u metody rekonstrukce zdroje ke zvýšení odstupu signálu od šumu. První vyplývá z použití více snímačů. Za předpokladu nekorelovaného aditivního šumu v každém snímači se odstup signálu od šumu zlepší přibližně v poměru druhé odmocniny počtu nezávislých párů snímačů, jejichž signály jsou vzájemně korelovány. Tedy, je-li N počet snímačů, činí zlepšení odstupu signálu od šumu přibližně $\sqrt{N/2}$.

Další podstatné zlepšení odstupu signálu od šumu vyplývá z operace vzájemné korelace prováděné na přijímaných signálech na rozdíl od jednoduché prahové detekce užívané při triangulaci. Vzájemná korelace je v principu podobná operaci přizpůsobené filtrace, o které je známo, že maximalizuje odstup signálu od šumu za přítomnosti bílého Gaussova šumu [SCH75]. U přizpůsobené filtrace je širokopásmový signál rozprostřený v čase komprimován filtrem na mnohem kratší puls. Přizpůsobená filtrace poskytuje zlepšení odstupu signálu od šumu přibližně v poměru \sqrt{M} , kde M je počet vzorků signálu. K podobnému zlepšení odstupu signálu od šumu dochází, jestliže dlouhé širokopásmové signály zdroje jsou vzájemně korelovány. V našem případě je za ideálních podmínek prováděna vzájemná korelace mezi dvěma stejnými signály (nehledě na časová zpoždění a měřítko amplitud), k nimž je přidán nekorelovaný šum. Celkové zlepšení odstupu signálu od šumu způsobené oběma efekty (použitím více snímačů a vzájemnou korelací) tedy činí přibližně

$\sqrt{NM/2}$. Proto tato technika umožňuje rekonstrukci relativně slabých zdrojů, které emitují signály pod úrovní šumu.

Numerické zpracování algoritmu

Shrneme-li fakta uvedená v předcházejících částech, dostaneme následující předpis pro numerický výpočet rekonstrukce :

1. Signály z protilehlých snímačů (popřípadě z libovolné dvojice snímačů) jsou vzájemně korelovány (vztah (7)). Výsledkem je veličina $B_{uu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau})$.
2. Veličina $B_{uu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau})$ je podrobena Fourierově transformaci (vztah (8)); tím získáme spektrální výkonovou hustotu $S_{uu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k)$.
3. Na spektrální výkonové hustotě je provedena operace inverzní filtrace (vztah (14)); tím získáme veličinu $Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k)$.
4. Jsou-li body 1 - 3 (viz obr.15) provedeny pro všechny dvojice protilehlých snímačů (popřípadě všechny možné dvojice snímačů), je provedena zpětná projekce (vztah (17)), ve kterém vystupuje veličina $\tilde{Q}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau})$, kterou získáme z $Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k)$ tomografickou filtrací [vztah (16)]. Výsledkem je rekonstruovaný obraz $F(\mathbf{r})$.

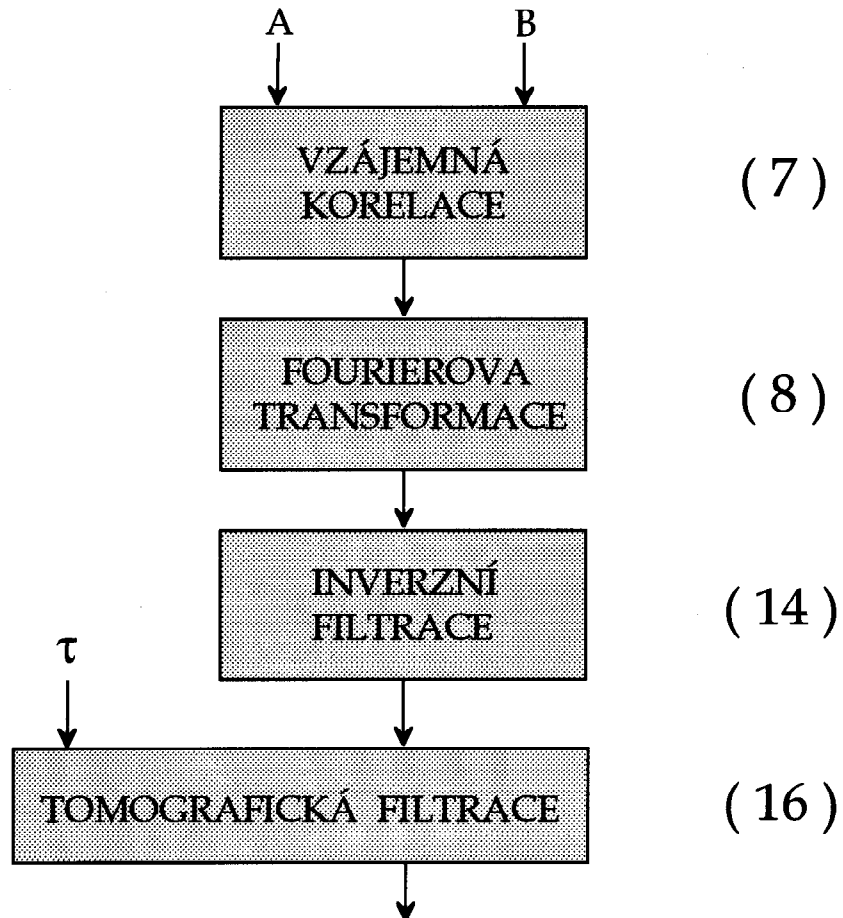
Pokud bychom se striktně drželi výše uvedeného předpisu, trval by výpočet neúměrně dlouhou dobu a byl by navíc zatížen mnoha numerickými chybami. Zejména tomografická filtrace podle vztahu (16) velice zatěžuje přesnost a rychlost výpočtu. Z těchto důvodů byly provedeny v některých bodech předpisu pro numerický výpočet rekonstrukce úpravy, které vedou k zjednodušení numerického výpočtu a tím i k podstatnému zrychlení tohoto algoritmu.

Jelikož signály z jednotlivých snímačů jsou v praxi získány ve formě diskretních posloupností, můžeme vztah (7), který definuje vzájemnou korelaci pro spojité signály, nahradit vztahem pro diskretní vzájemnou korelaci $R_i(x, y)$:

$$R_i(x, y) = \sum_{v=0}^{N_1-1} x_v y_{v+1} \quad , -(N_1 - 1) \leq i \leq N_2 - 1 \quad ,$$

kde x_v a y_v jsou konečné reálné posloupnosti.

Popis použití Fourierovy transformace k výpočtu korelace je uveden v Dodatku C



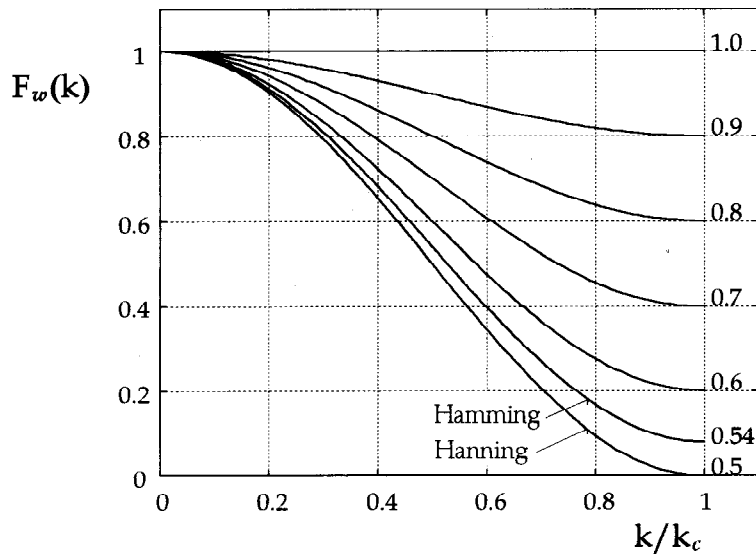
Obr.15 Algoritmus rekonstrukce

Tomografická filtrace

Ve vztahu (16) se provádí frekvenční váhování, které je obdobné frekvenčnímu váhování v tradičním algoritmu konvoluční zpětné projekce. Někdy se kromě faktoru $|k|$ používá ještě člen $F_w(k)$ představující váhovací okénko. Obvykle je použito zobecněné Hammingovo okénko (viz obr.16), pro které platí

$$F_w(k) = \alpha + (1 - \alpha) \cos(\pi k/k_c) \quad , \alpha \in \langle 0.5; 1 \rangle$$

speciálně : $\alpha = 1$ - obdélníkové okénko,
 $\alpha = 0.54$ - Hammingovo okénko,
 $\alpha = 0.5$ - Hanningovo okénko.



Obr.16 Váhovací okénka

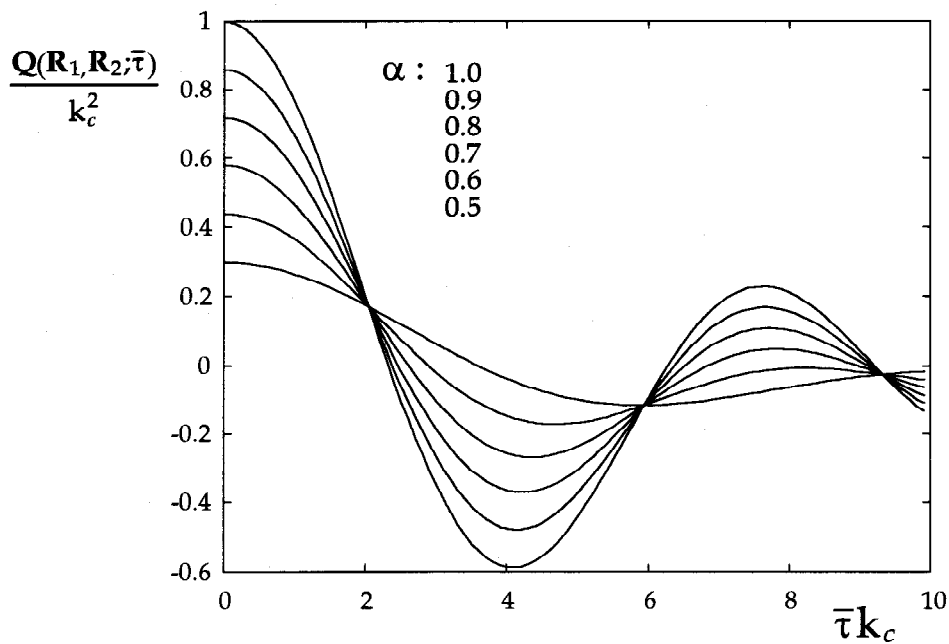
Vliv okénka můžeme dobře sledovat na rekonstrukci zdroje, který byl umístěn ve středu uzavírající kružnice; tudíž na všech snímačích obdržíme stejné signály a $Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k) = 1$. Pro tento jednoduchý případ můžeme vypočítat veličinu $\tilde{Q}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau})$ přesně

$$\tilde{Q}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau}) = \int_{-k_c}^{k_c} dk F_w(k) |k| e^{ik\bar{\tau}} = \frac{2\alpha b}{a^2} [\cos(a) - 1 + a \sin(a)] +$$

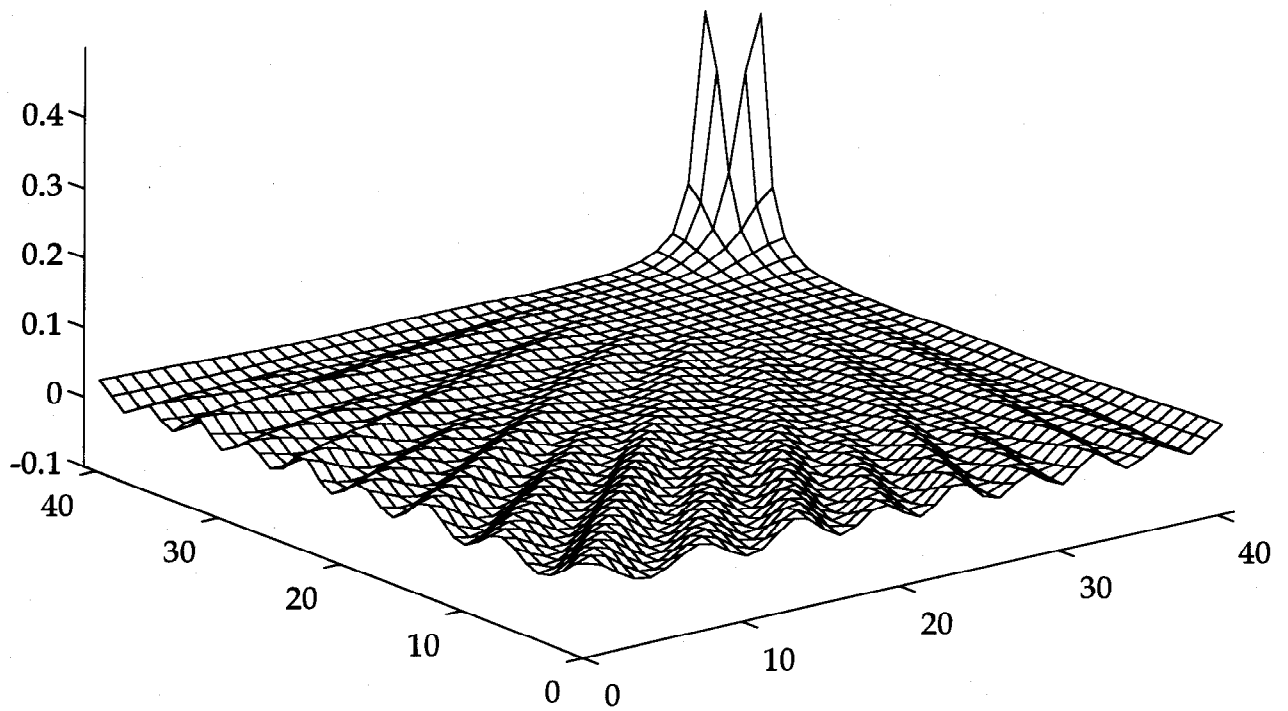
$$+ \frac{2(1-\alpha)b}{(\pi^2 - a^2)^2} \{a(\pi^2 - a^2) \sin(a) - (\pi^2 + a^2)[\cos(a) + 1]\}$$

kde $a = \bar{\tau}k_c$ a $b = k_c^2$.

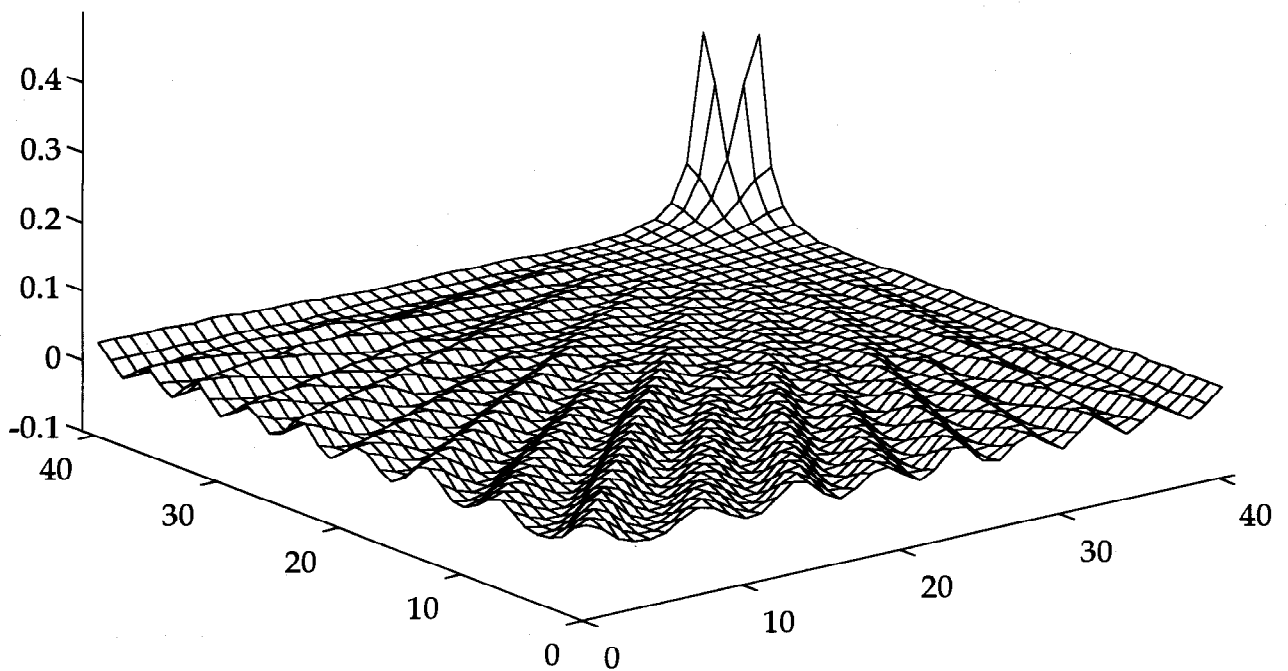
Veličina $\tilde{Q}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau})$ je vynesena na obr.17 v závislosti na $\bar{\tau}k_c$. Dosadíme-li tento výsledek do vztahu (17) a provedeme-li zpětnou rekonstrukci, obdržíme rekonstrukce zobrazené na obr.18a,b,c,d,e,f,g. Při výpočtu bylo použito 32 hypotetických snímačů rozmístěných na uzavírající kružnici o poloměru 5cm; v úvahu se braly korelace všech snímačů. Z obr.18 je patrné, že s rostoucí hodnotou α se zvětšují zákmity okolo zdrojové špičky.



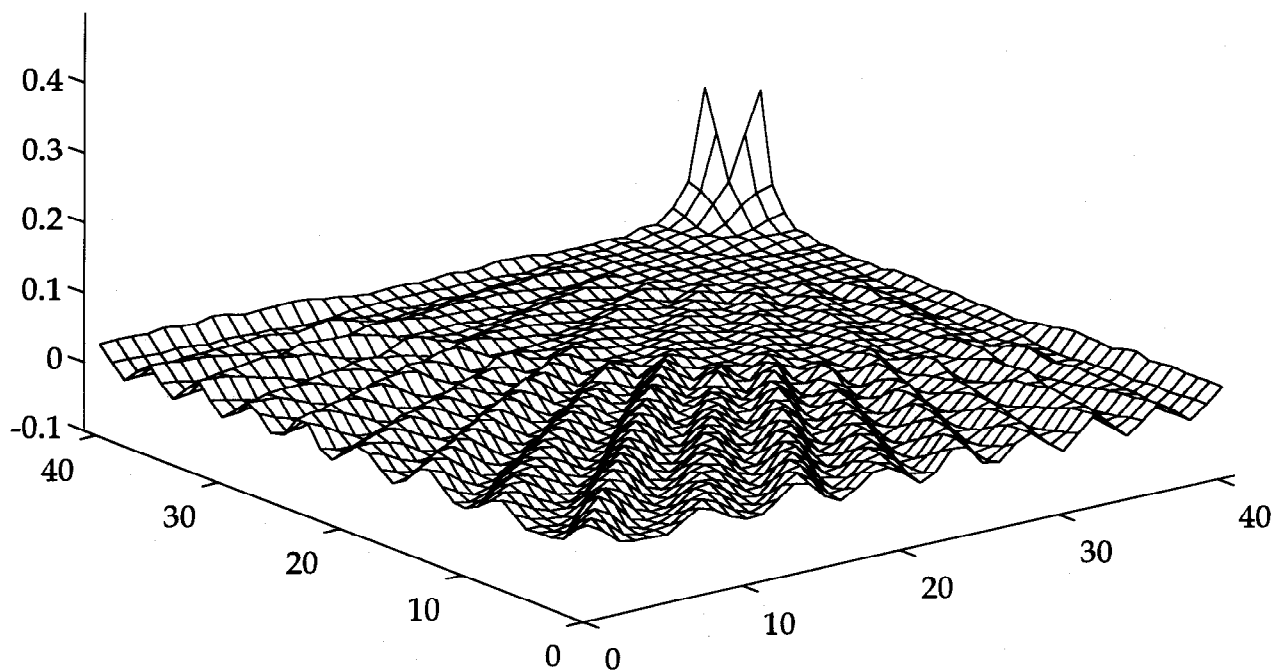
Obr.17 Veličina $\tilde{Q}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau})/k_c^2$ vynesená v závislosti na $\bar{\tau}k_c$



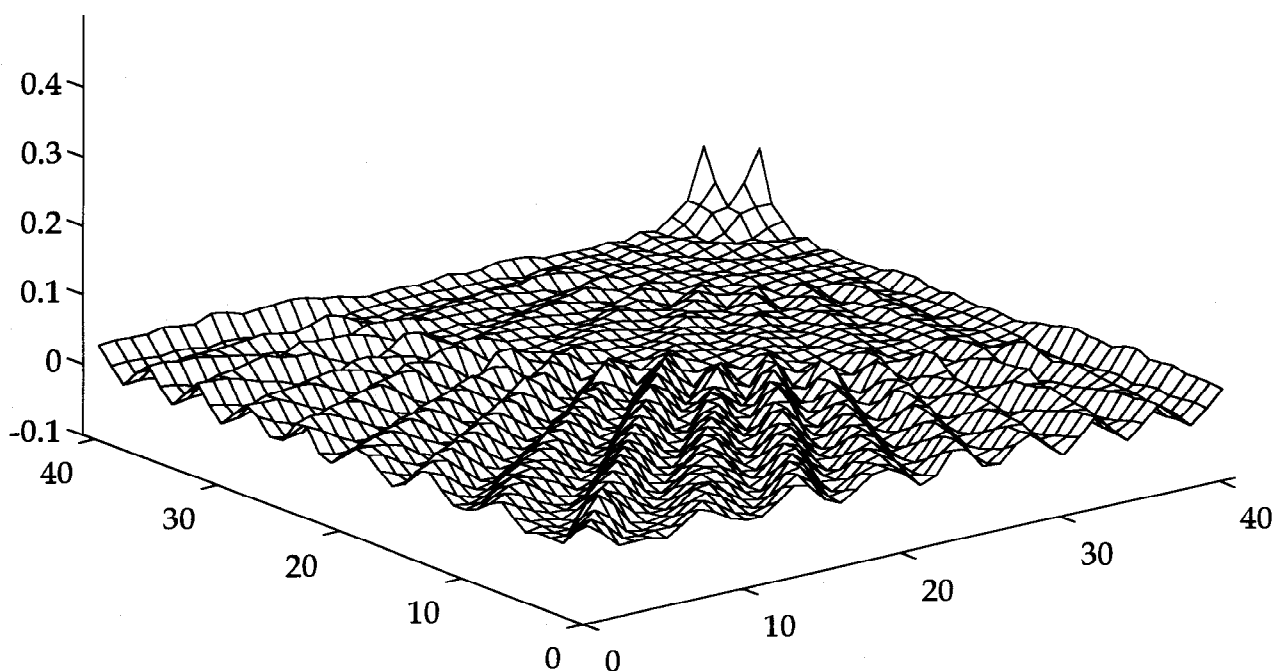
Obr.18a Rekonstrukce při použití 32 hypotetických snímačů rozmístěných na kružnici o poloměru 5 cm; v úvahu se braly korelace všech snímačů ($\alpha = 0.50$).



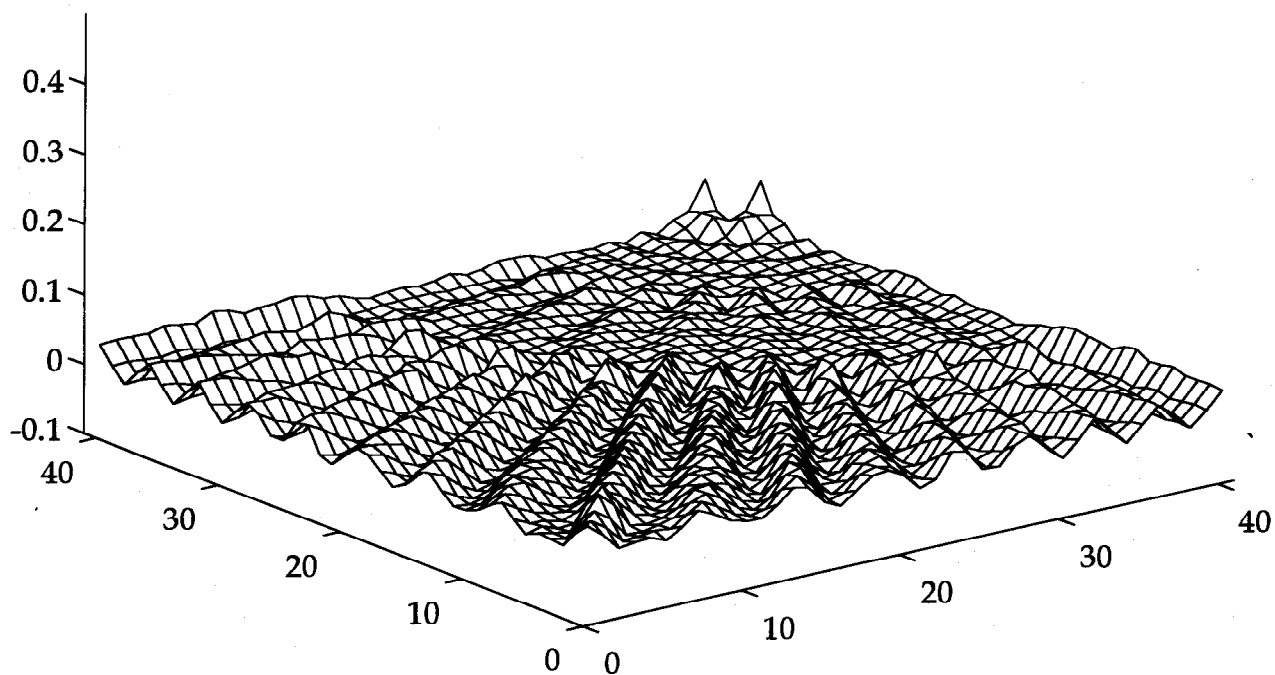
Obr.18b Rekonstrukce při použití 32 hypotetických snímačů rozmístěných na kružnici o poloměru 5 cm; v úvahu se braly korelace všech snímačů ($\alpha = 0.54$).



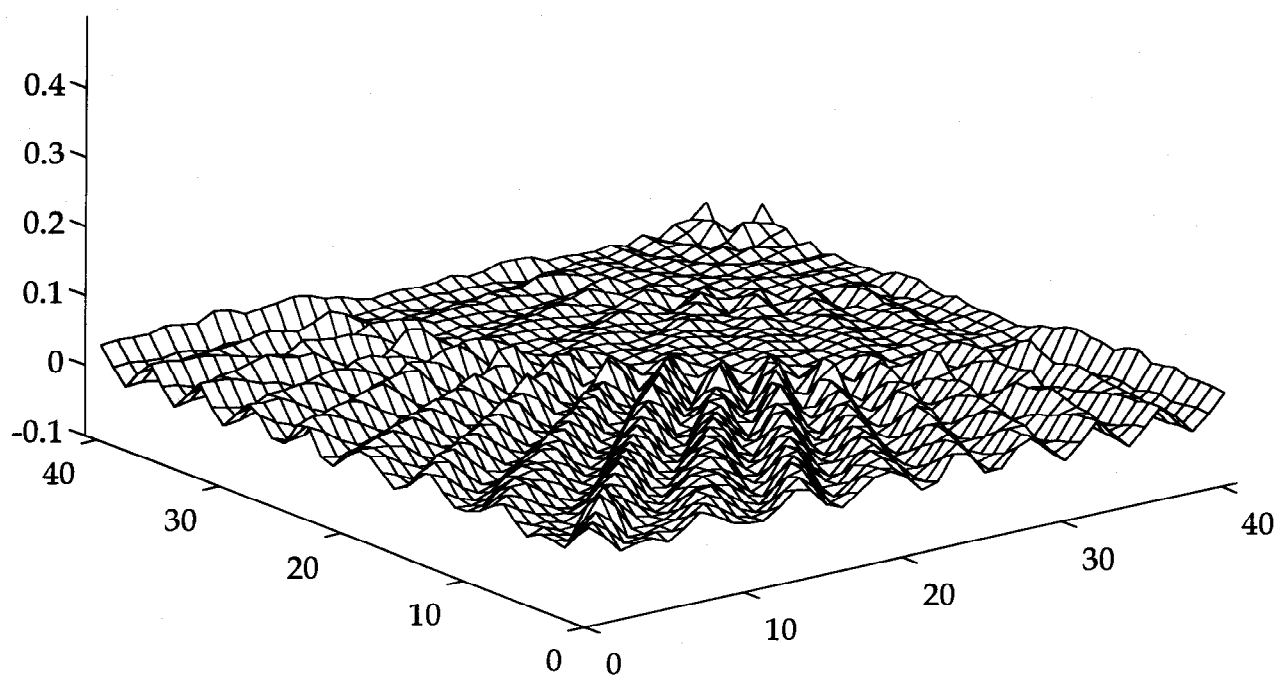
Obr.18c Rekonstrukce při použití 32 hypotetických snímačů rozmístěných na kružnici o poloměru 5 cm; v úvahu se braly korelace všech snímačů ($\alpha = 0.60$).



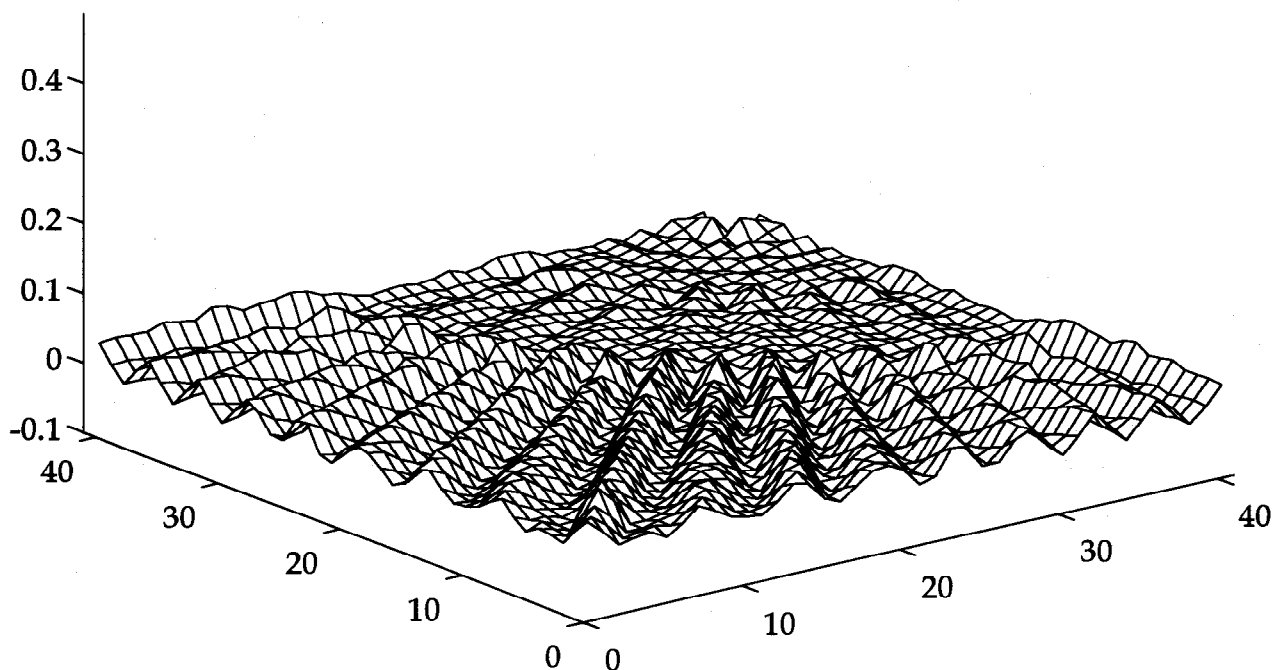
Obr.18d Rekonstrukce při použití 32 hypotetických snímačů rozmístěných na kružnici o poloměru 5 cm; v úvahu se braly korelace všech snímačů ($\alpha = 0.70$).



Obr.18e Rekonstrukce při použití 32 hypotetických snímačů rozmístěných na kružnici o poloměru 5 cm; v úvahu se braly korelace všech snímačů ($\alpha = 0.80$).



Obr.18f Rekonstrukce při použití 32 hypotetických snímačů rozmístěných na kružnici o poloměru 5 cm; v úvahu se braly korelace všech snímačů ($\alpha = 0.90$).

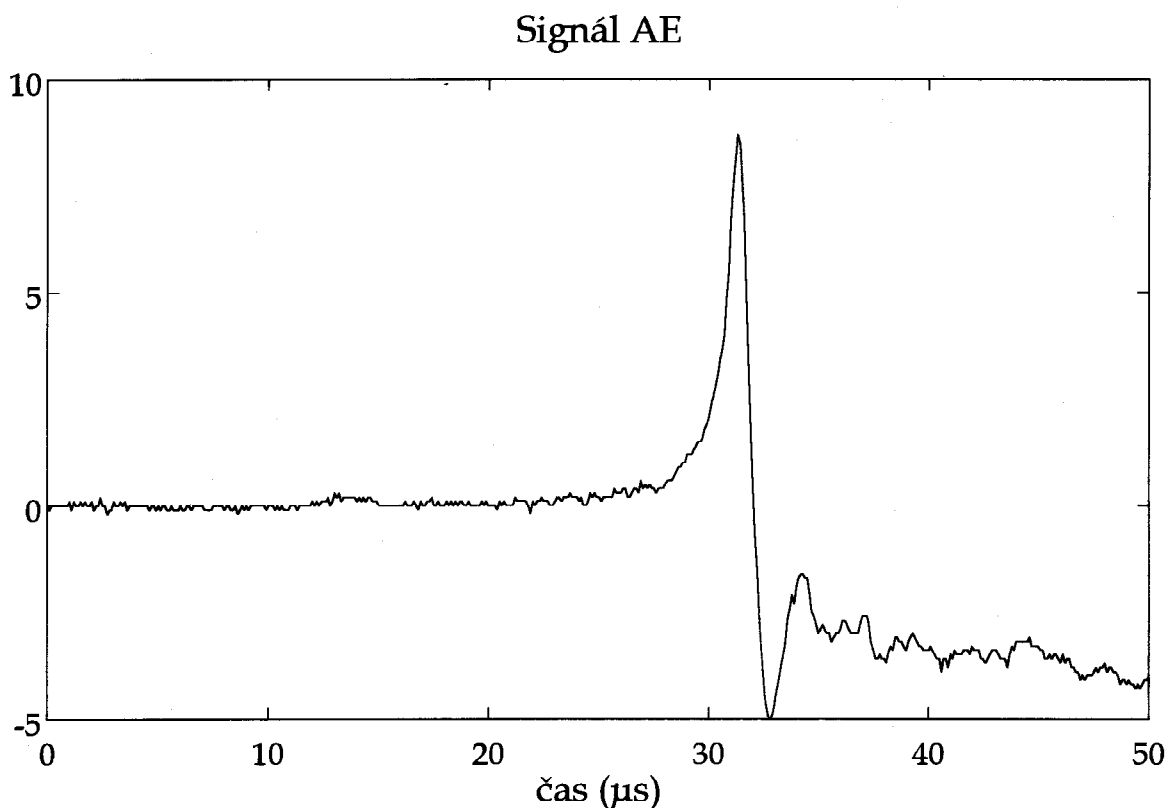


Obr.18g Rekonstrukce při použití 32 hypotetických snímačů rozmístěných na kružnici o poloměru 5 cm; v úvahu se braly korelace všech snímačů ($\alpha = 1.00$).

Integrál ve vztahu (16) je v podstatě předpis pro zpětnou Fourierovu transformaci funkce $Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k)|k|$, popřípadě, využijeme-li frekvenční okénko, funkce $Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; k)|k|F_w(k)$. Z důvodu zrychlení výpočtu algoritmu rekonstrukce je velice výhodné převést Fourierovu transformaci na diskrétní Fourierovu transformaci. V tomto případě se už nebude muset vypočítávat Fourierův integrál pro každý rekonstruovaný bod (pro každý nový rekonstruovaný bod bylo třeba vypočítávat znovu integrál ve vztahu (16), neboť se změnou rekonstruovaného bodu se změnila i hodnota $\bar{\tau}$ - viz vztah (18)). Při použití diskrétní Fourierovy transformace dostaneme konečnou posloupnost $\tilde{Q}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau}_i)$ pro diskrétní hodnoty $\bar{\tau}_i$. Při zpětné rekonstrukci (vztah (17)) je potom třeba nalézt hodnotu $\tilde{Q}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau})$, kde $\bar{\tau}$ je vypočteno ze vztahu (18) interpolací v posloupnosti $\tilde{Q}_i(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \bar{\tau}_i)$.

Simulace

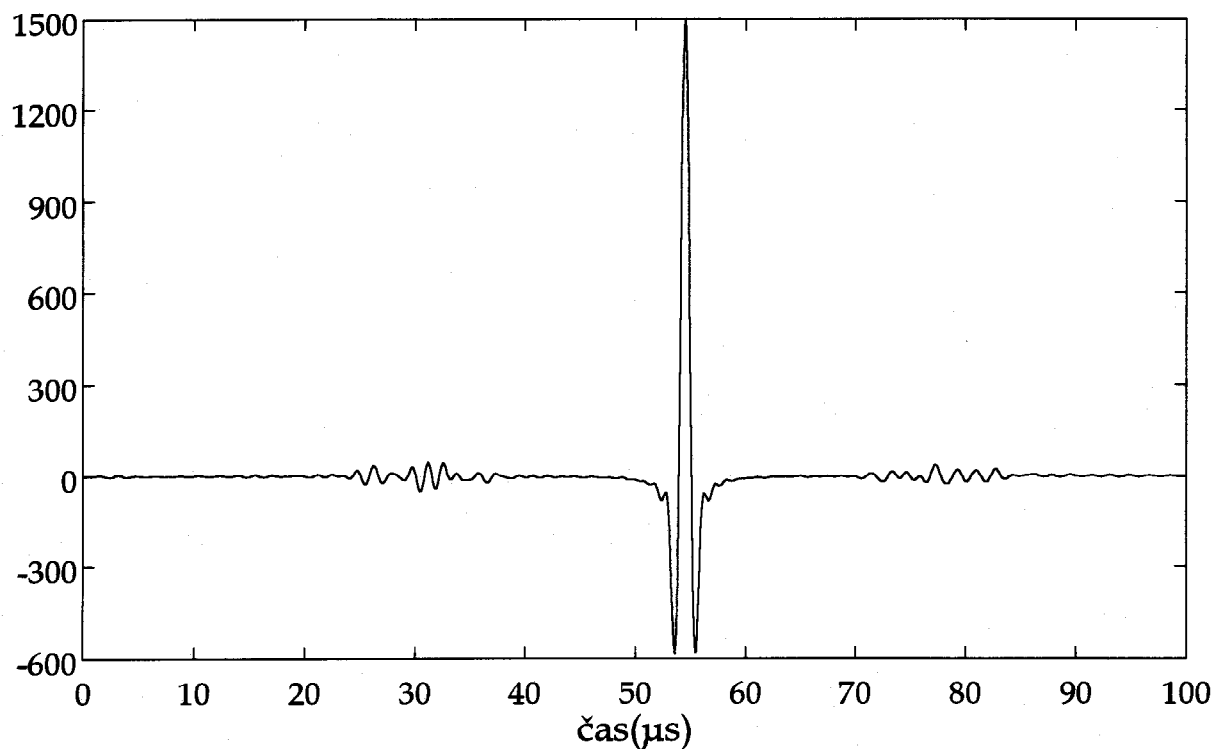
Numerické simulace rekonstrukčního algoritmu byly provedeny za použití zdigitalizovaného signálu AE, který byl vyvolán lámáním skleněné kapiláry uprostřed tlusté ocelové desky. Na obr.19 je tento signál znázorněn.



Obr.19 Signál AE

Použitý zdroj je izotropní, pokud lámaná kapilára vytváří kolmou (normálovou) sílu a použité snímače měří normálové výchylky (rychlosti, zrychlení). V [RIN80] jsou popsány experimenty, které prokazují, že zdroj vytvořený lámáním kapiláry je, jak se očekávalo, všesměrový a že signály nahrané v poměrně málo rozdílných vzdálenostech od zdroje nejsou vážně změněny (nejsou disperzní). O tom svědčí vzájemná korelace těchto signálů. Obr.20 znázorňuje vzájemnou korelaci signálů AE, které jsou nahrané v rozdílných vzdálenostech od zdroje. Z obrázku je patrná úzká, pěkně definovaná korelační špička.

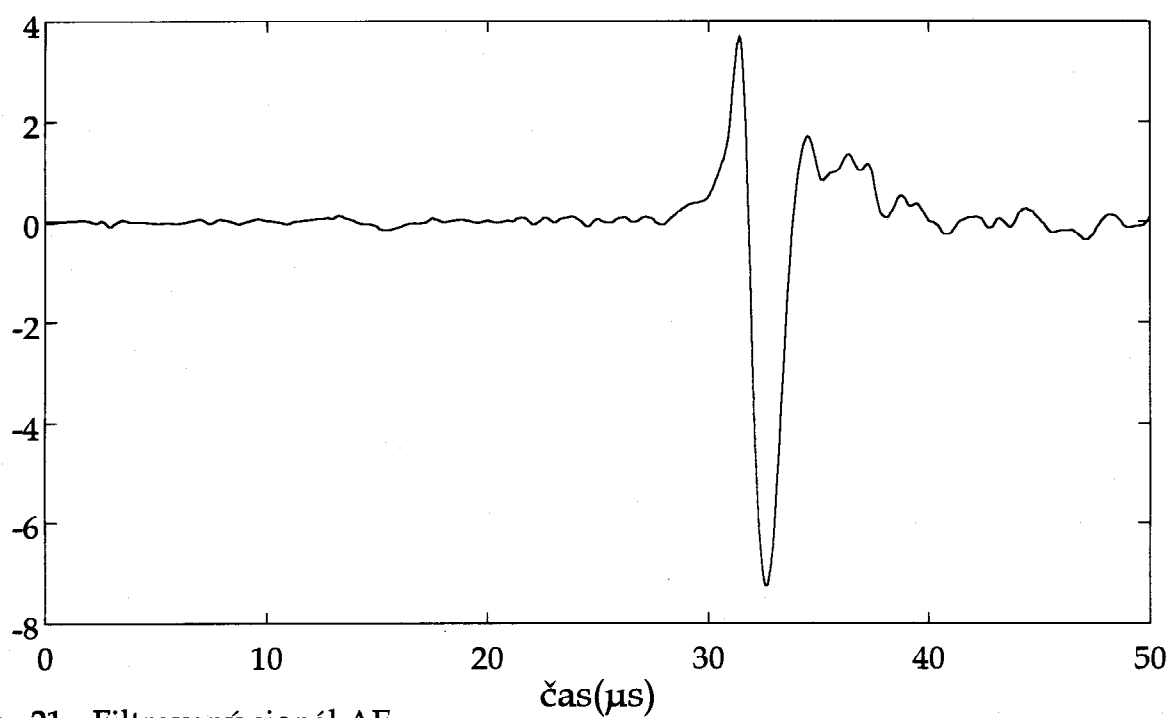
Vzájemná korelace signálů



Obr.20 Vzájemná korelace signálů

Prototypový signál byl před provedením rekonstrukčního algoritmu filtrován pásmovou propustí 100 kHz až 1 MHz (viz obr.21).

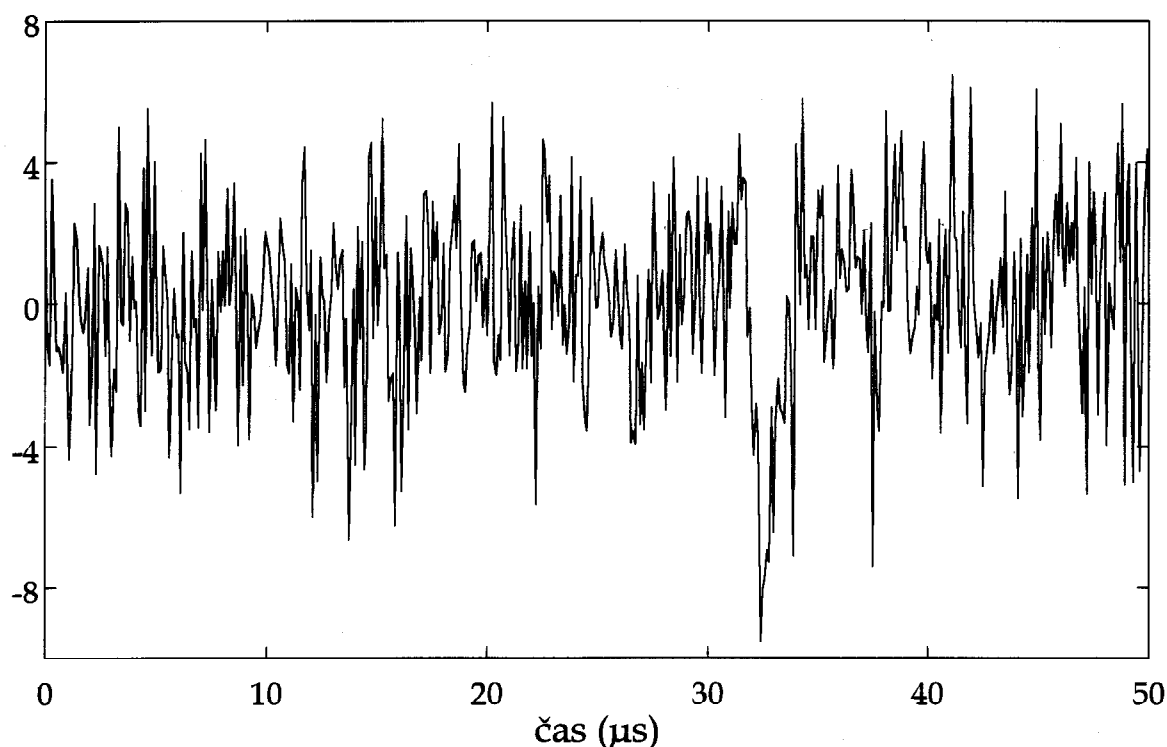
Filtrovaný signál AE



Obr.21 Filtrovaný signál AE

Pro ověření kvality rekonstrukčního algoritmu byl k prototypovému signálu akustické emise přidán Gaussovský šum s poměrem signál-šum 0.5 (viz obr.22). Při tomto poměru signál-šum je prototypový signál téměř celý utopený v šumu. Šum přidaný k jednotlivým snímačům byl nekorelovaný.

Filtrovaný signál AE se šumem



Obr.22 Filtrovaný signál AE se šumem

Poněvadž tvar signálu v našem experimentu nebyl příliš ovlivněn dobou přechodu a směrem, byl pro simulaci signálů z $N=32$ hypotetických snímačů využit pouze jeden prototypový signál akustické emise. Tyto snímače byly rozmístěny na kružnici o poloměru 5cm. Vzdálenost snímačů je přibližně 1cm. Vlnová délka složek zdrojového signálu o nejvyšší uvažované frekvenci byla odhadnuta asi na 3mm. Tedy 32 snímačů představuje dosti řídké prostorové vzorkování emitovaných signálů.

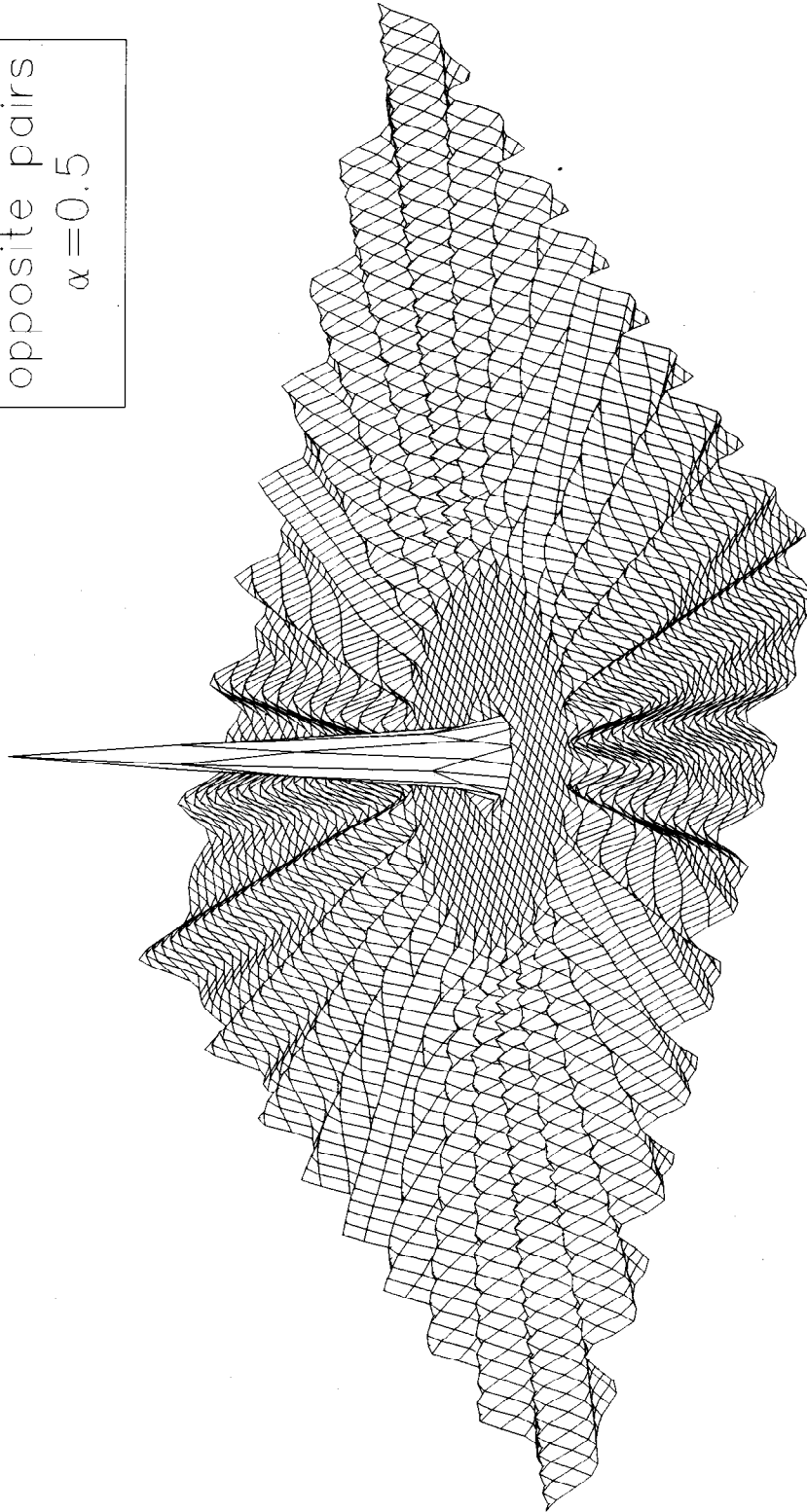
V první sadě příkladů byl simulovaný umělý zdroj umístěn uprostřed kruhového pole snímačů. Výpočty byly provedeny jak pro vzájemné korelace protilehlých párů snímačů tak pro vzájemné korelace všech možných párů snímačů. Uvažován

byl dále případ emisních signálů bez šumu i se šumem. Výše uvedené příklady simulací jsou uvedeny na obr. 23a,b,c,d.

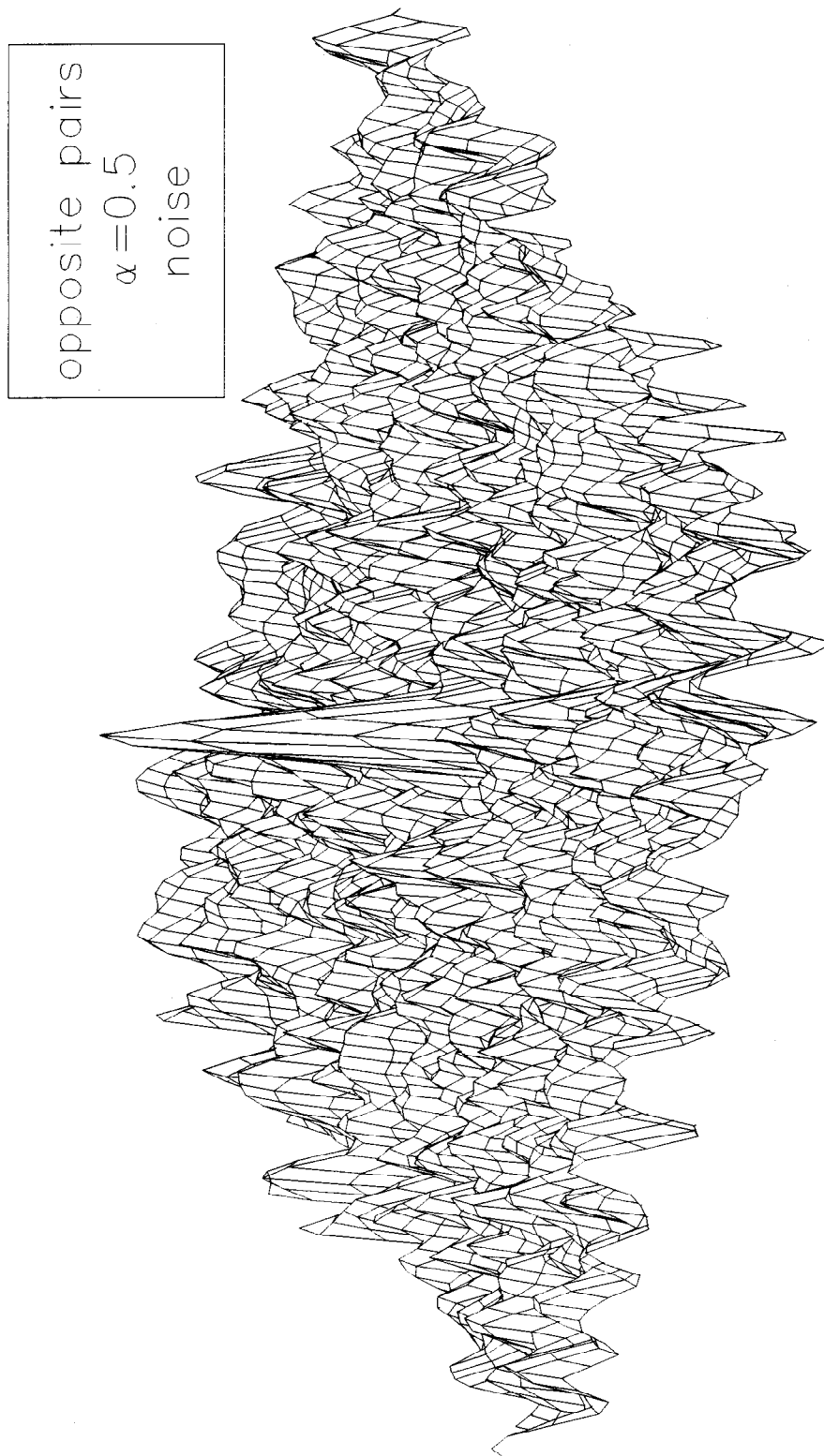
Ve druhé sadě příkladů byl simulovaný umělý zdroj umístěn 2cm od středu kruhového pole snímačů. Výpočty byly provedeny jak pro vzájemné korelace protilehlých párů snímačů tak pro vzájemné korelace všech možných párů snímačů. Uvažován byl dále případ emisních signálů bez šumu i se šumem. Výše uvedené příklady simulací jsou uvedeny na obr. 23e,f,g,h.

Ve třetí sadě příkladů byly simulované umělé zdroje dva; první byl umístěn uprostřed kruhového pole snímačů a druhý byl umístěn 2 cm od středu kruhového pole snímačů. Výpočty byly provedeny jak pro vzájemné korelace protilehlých párů snímačů tak pro vzájemné korelace všech možných párů snímačů. Uvažován byl dále případ emisních signálů bez šumu i se šumem. Výše uvedené příklady simulací jsou uvedeny na obr. 23i,j,k,l.

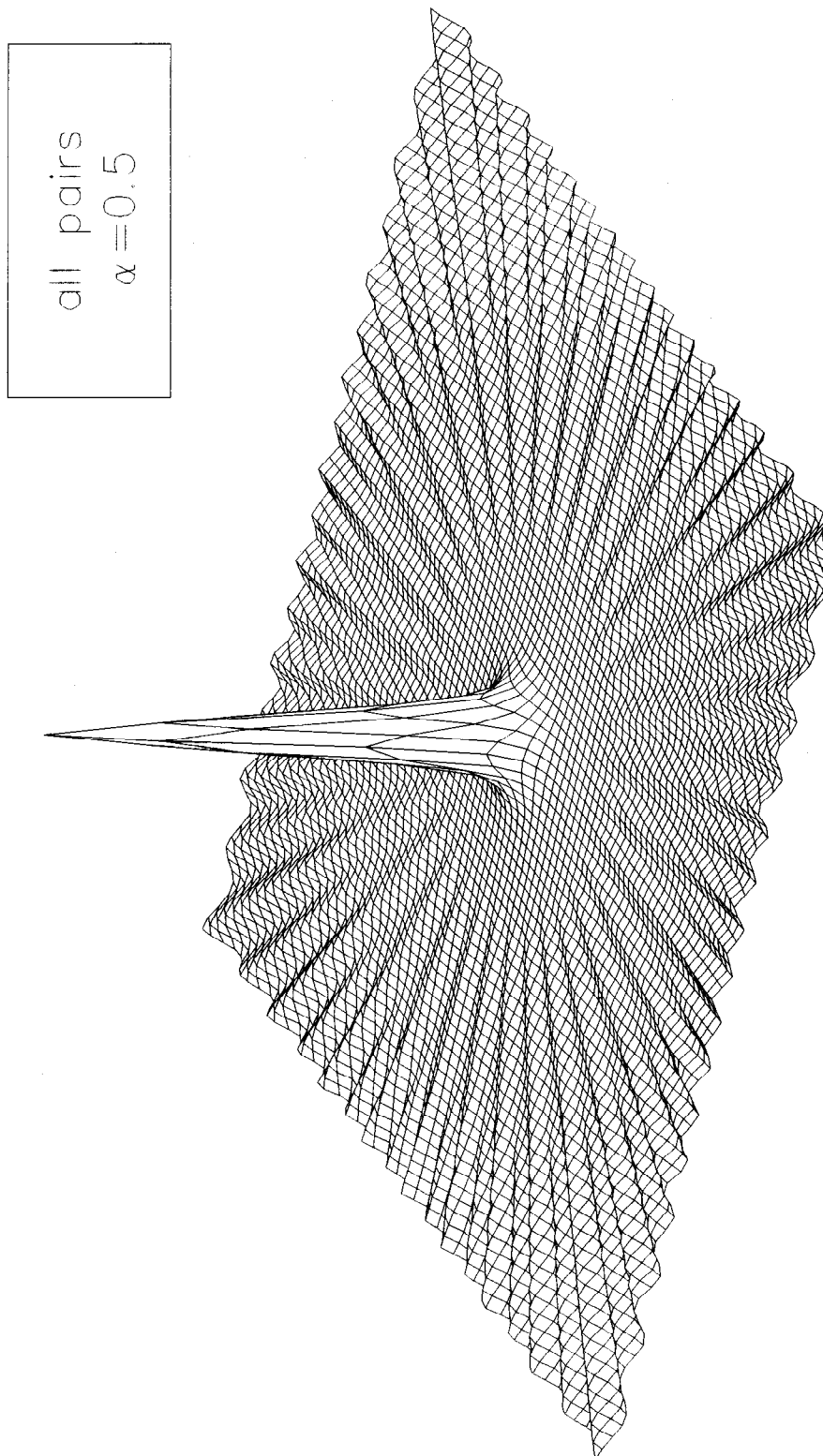
opposite pairs
 $\alpha = 0.5$



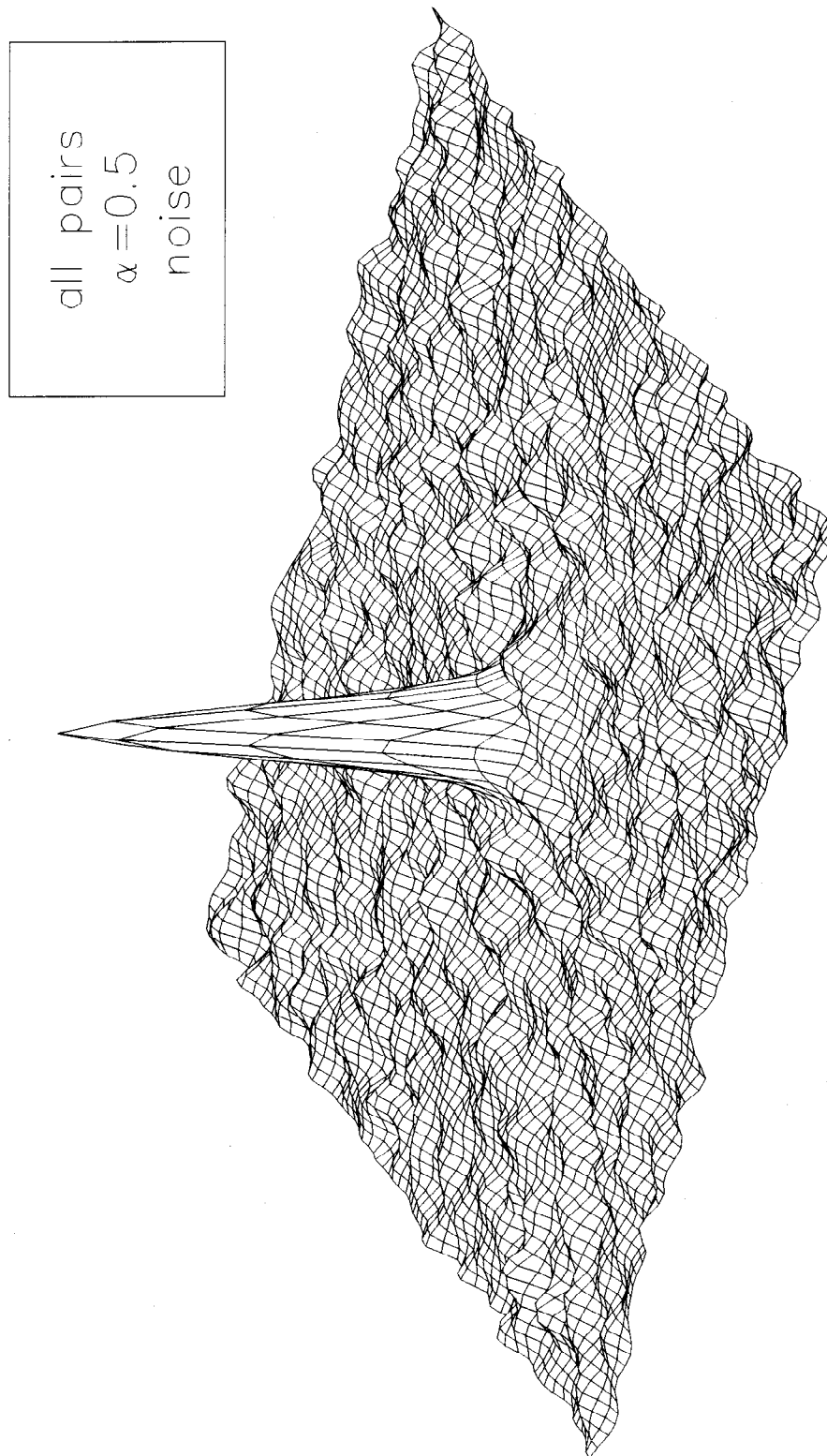
Obr.23a Zdroj uprostřed kruhového pole snímačů.
Výpočet proveden pro vzájemné korelace protilehlých párů snímačů .
Emisní signál bez šumu.



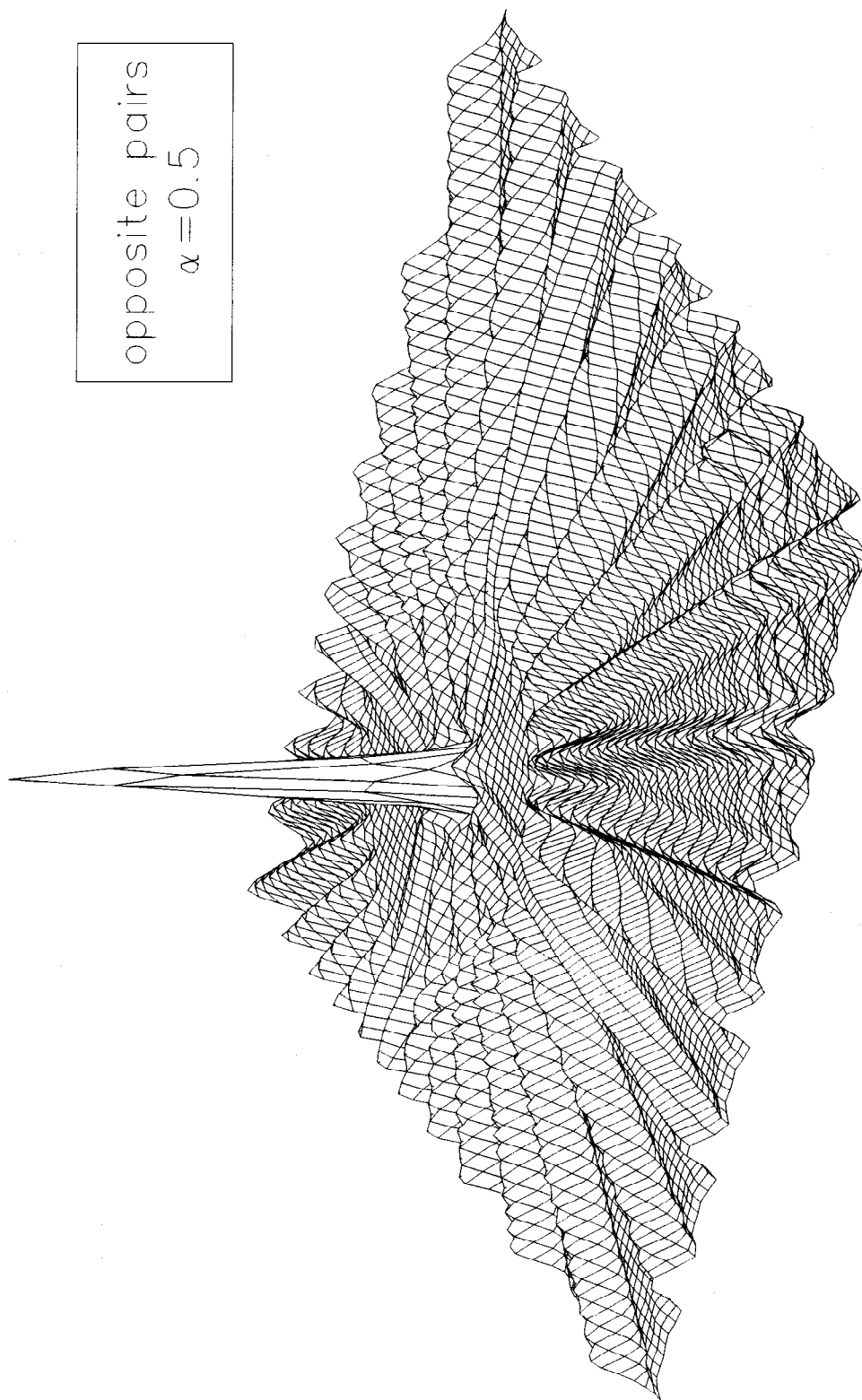
Obr.23b Zdroj uprostřed kruhového pole snímačů.
Výpočet proveden pro vzájemné korelace protilehlých párů snímačů .
Emisní signál se šumem.



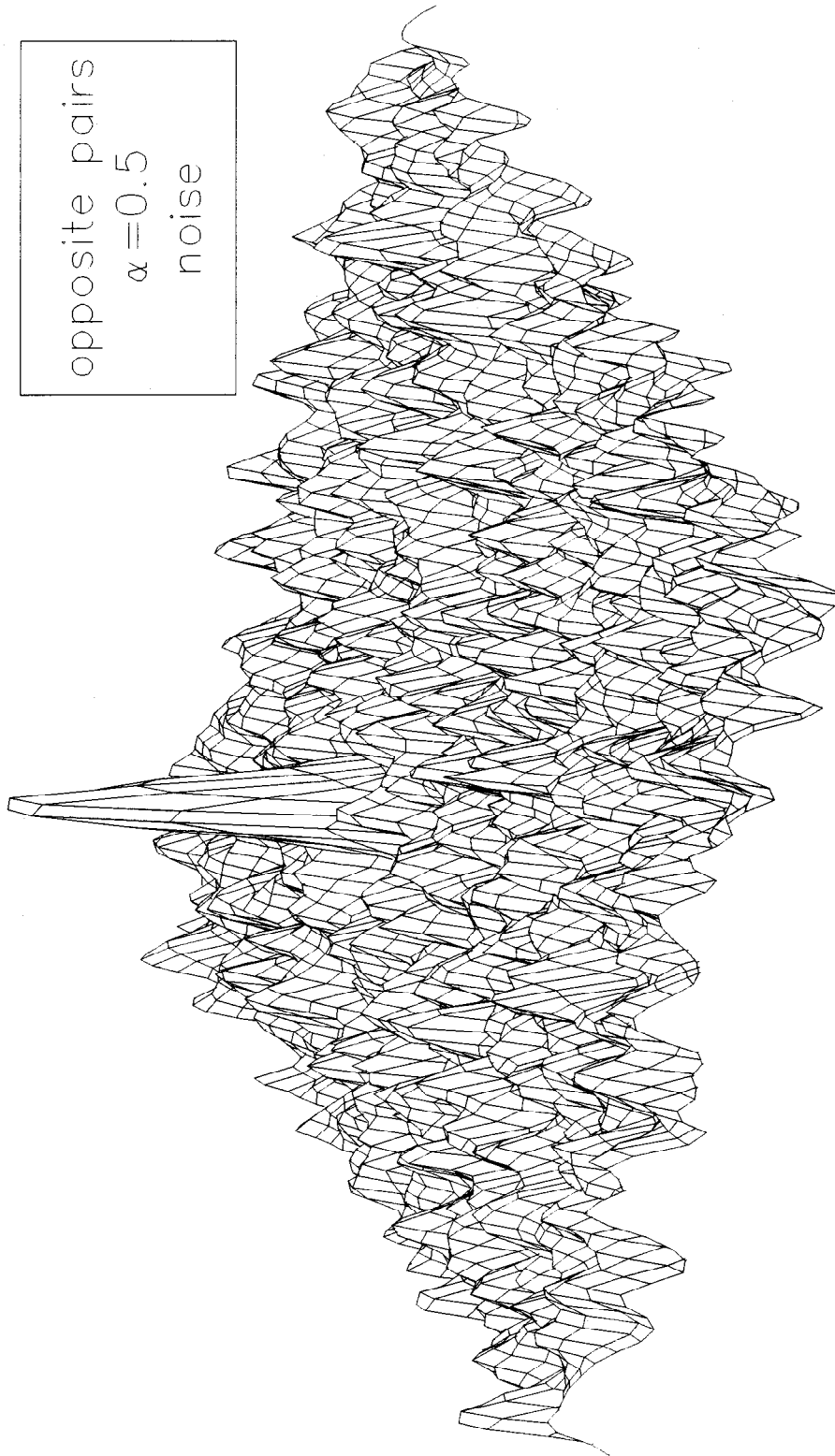
Obr.23c Zdroj uprostřed kruhového pole snímačů.
Výpočet proveden pro vzájemné korelace všech párů snímačů .
Emisní signál bez šumu.



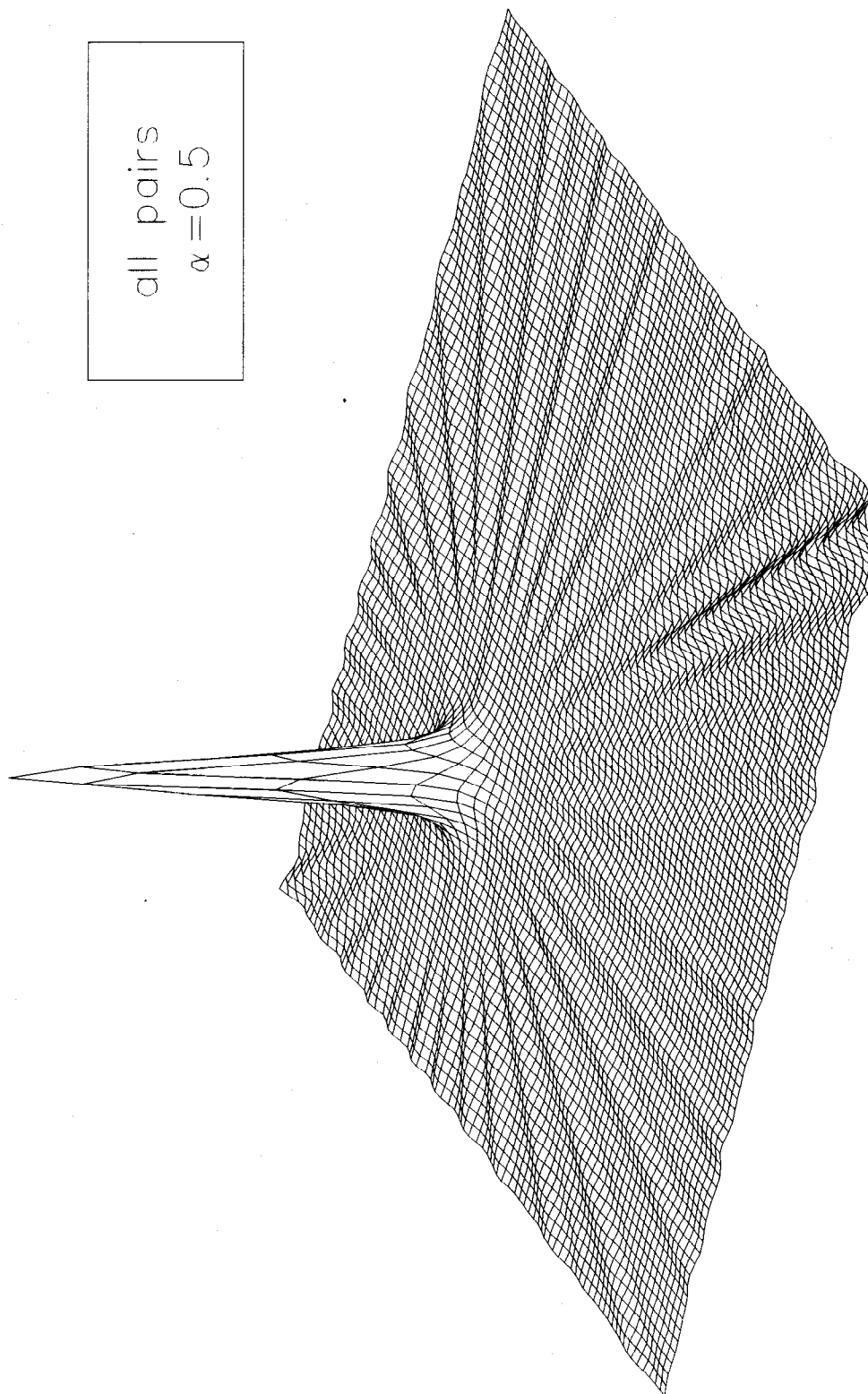
Obr.23d Zdroj uprostřed kruhového pole snímačů.
Výpočet proveden pro vzájemné korelace všech párů snímačů .
Emisní signál se šumem.



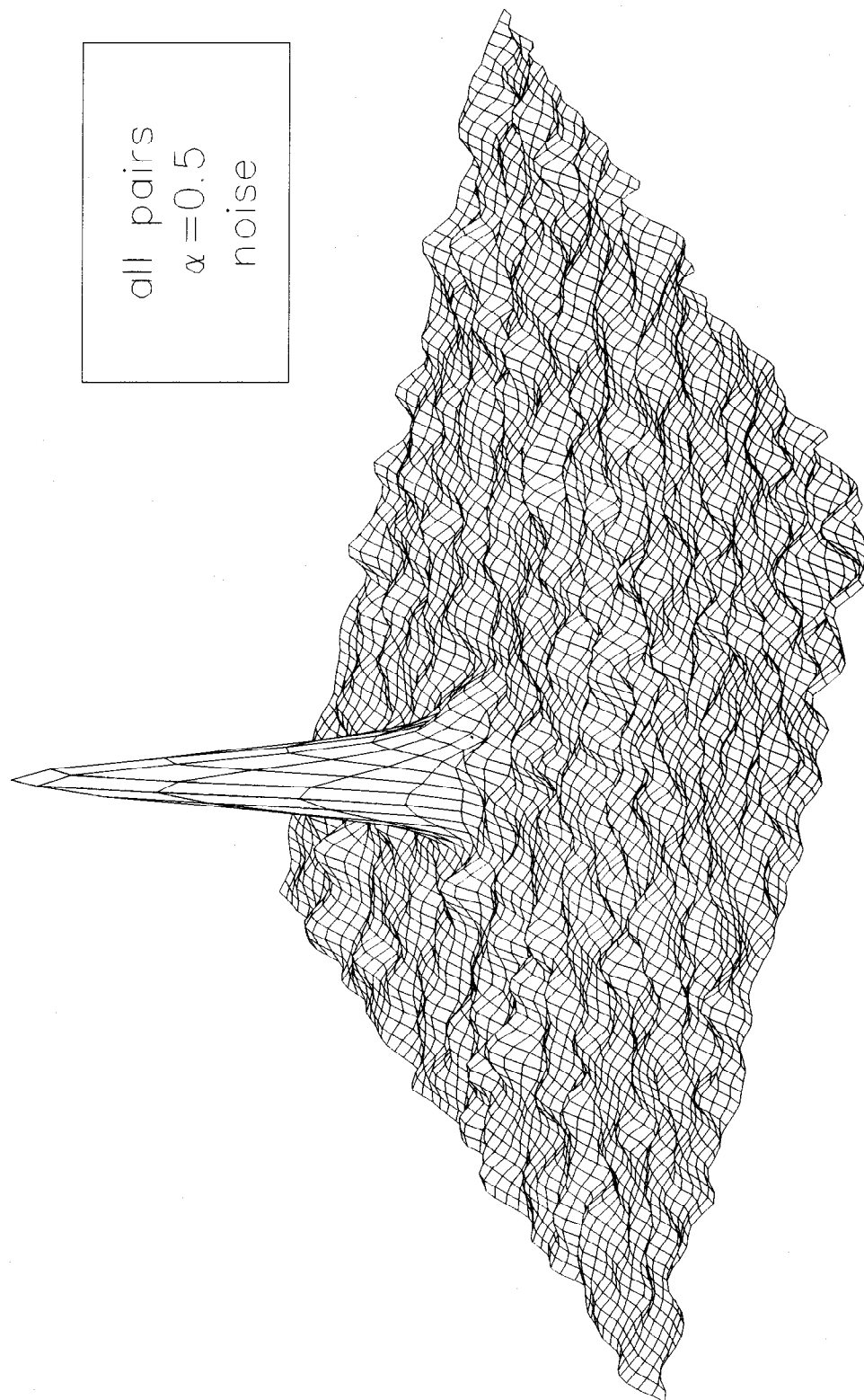
Obr.23e Zdroj mimo střed kruhového pole snímačů.
Výpočet proveden pro vzájemné korelace protilehlých párů snímačů .
Emisní signál bez šumu.



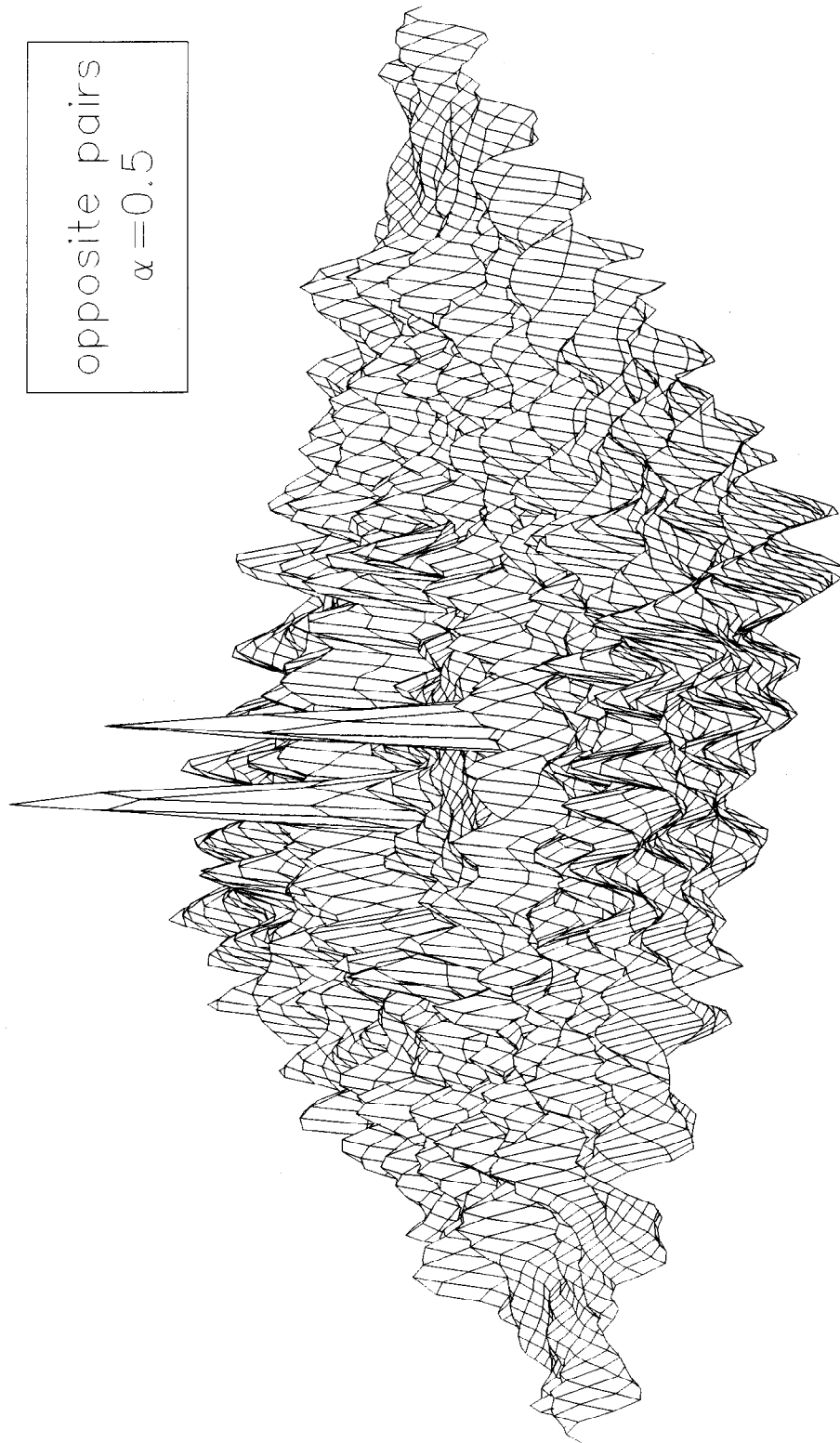
Obr.23f Zdroj mimo střed kruhového pole snímačů.
Výpočet proveden pro vzájemné korelace protilehlých párů snímačů .
Emisní signál se šumem.



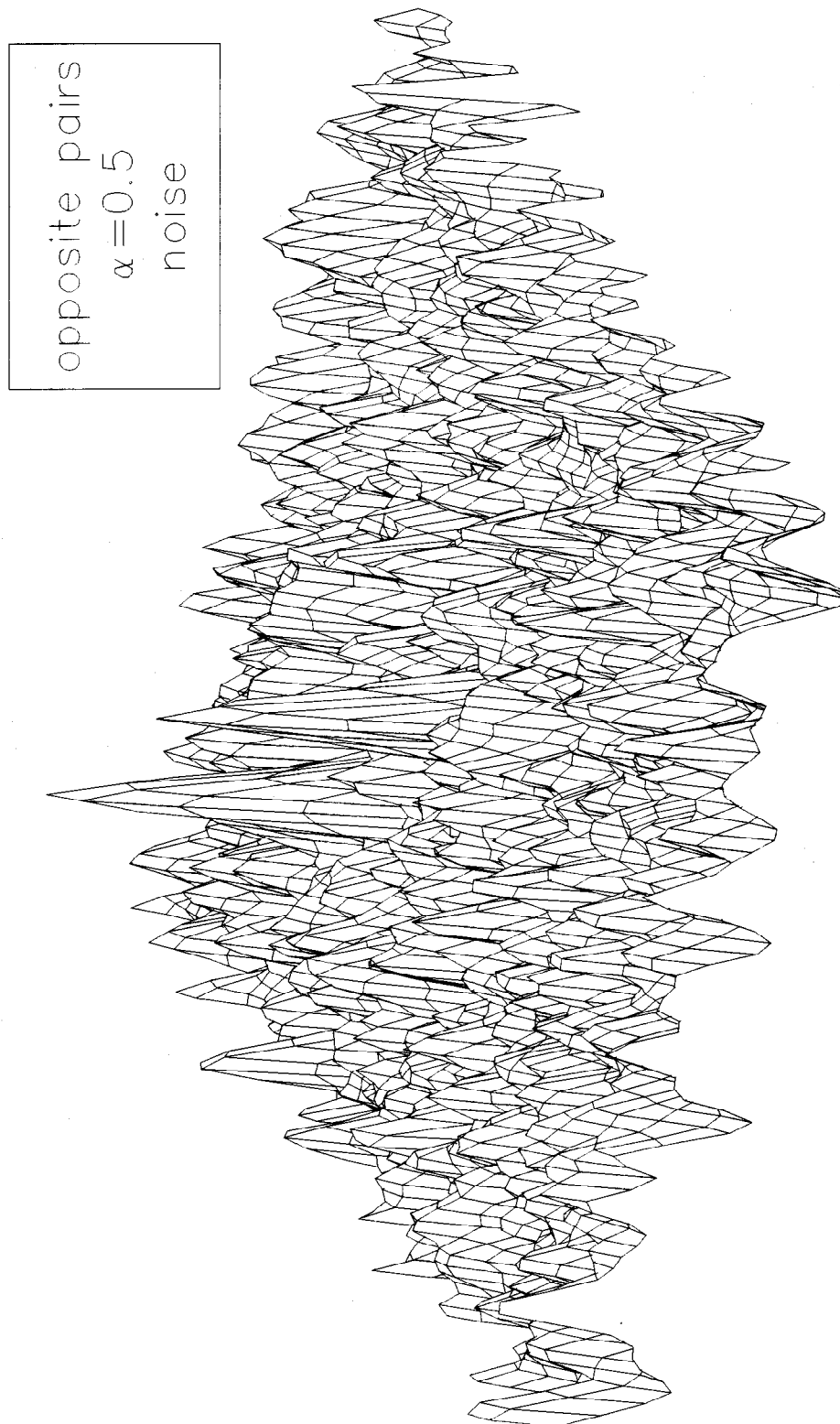
Obr.23g Zdroj mimo střed kruhového pole snímačů.
Výpočet proveden pro vzájemné korelace všech párů snímačů .
Emisní signál bez šumu.



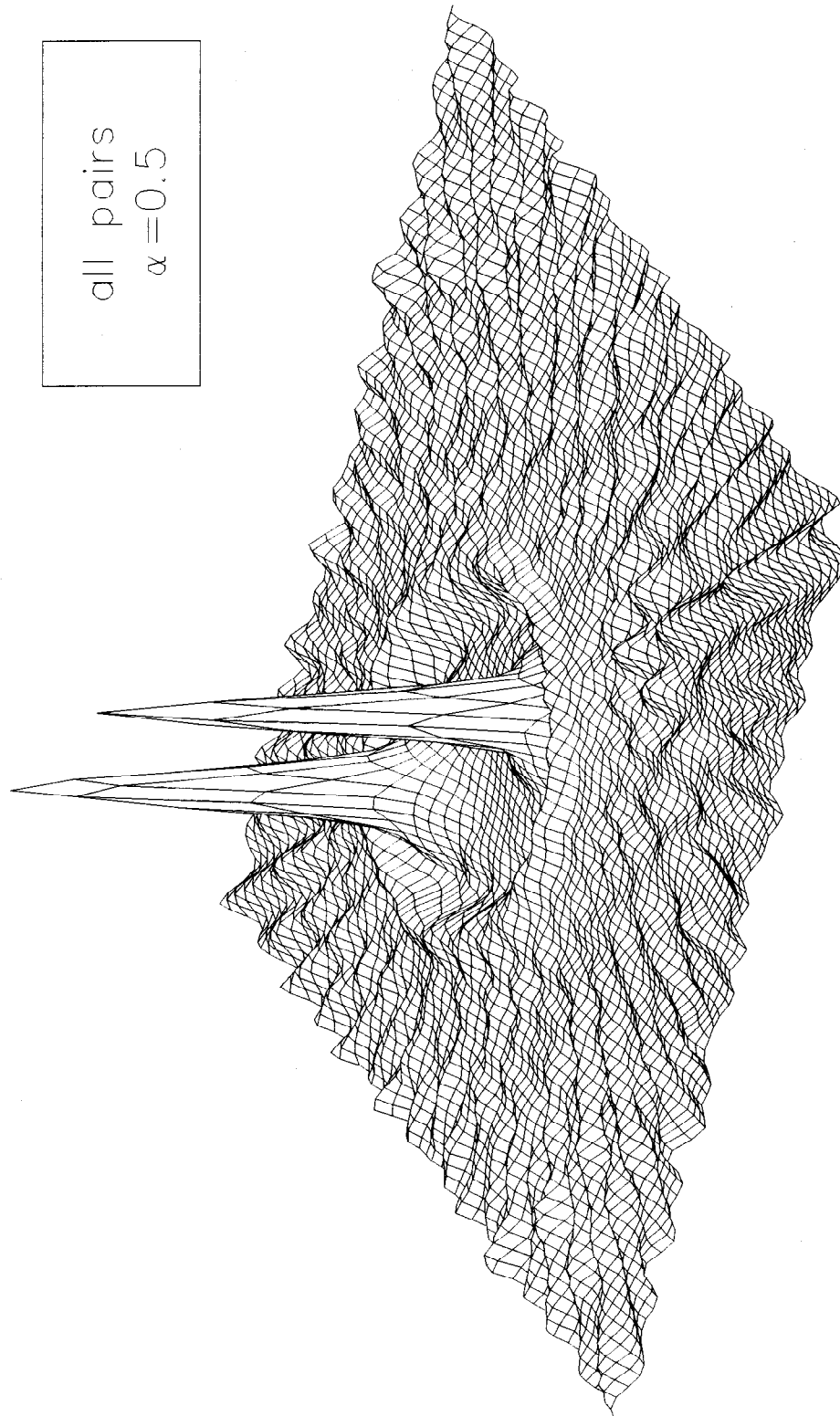
Obr.23h Zdroj mimo střed kruhového pole snímačů.
Výpočet proveden pro vzájemné korelace všech párů snímačů .
Emisní signál se šumem.



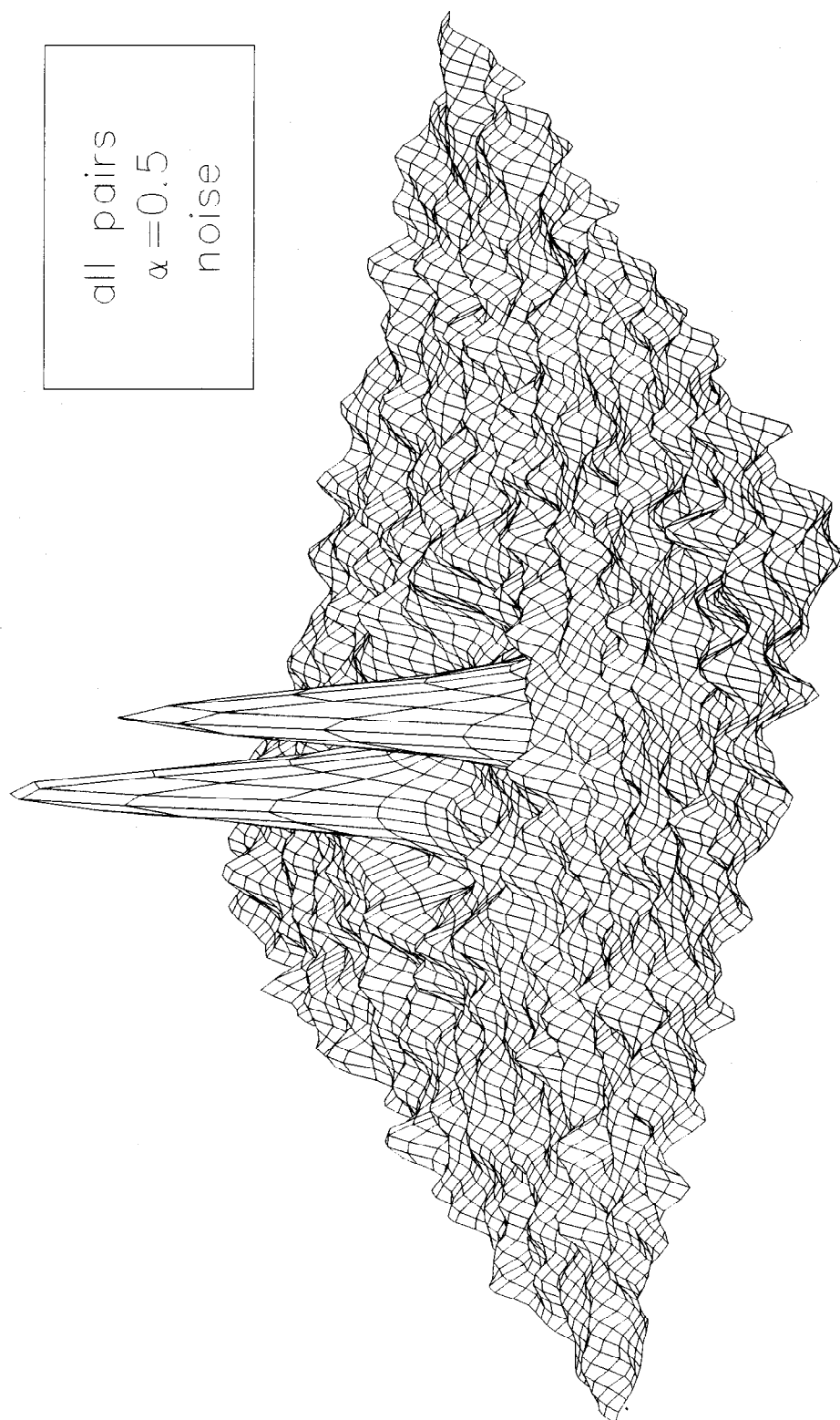
Obr.23i Zdroj uprostřed i mimo střed kruhového pole snímačů.
 Výpočet proveden pro vzájemné korelace protilehlých párů snímačů .
 Emisní signál bez šumu.



Obr.23j Zdroj uprostřed i mimo střed kruhového pole snímačů.
Výpočet proveden pro vzájemné korelace protilehlých párů snímačů .
Emisní signál se šumem.



Obr.23k Zdroj uprostřed i mimo střed kruhového pole snímačů.
Výpočet proveden pro vzájemné korelace všech párů snímačů .
Emisní signál bez šumu.



all pairs
 $\alpha = 0.5$
 noise

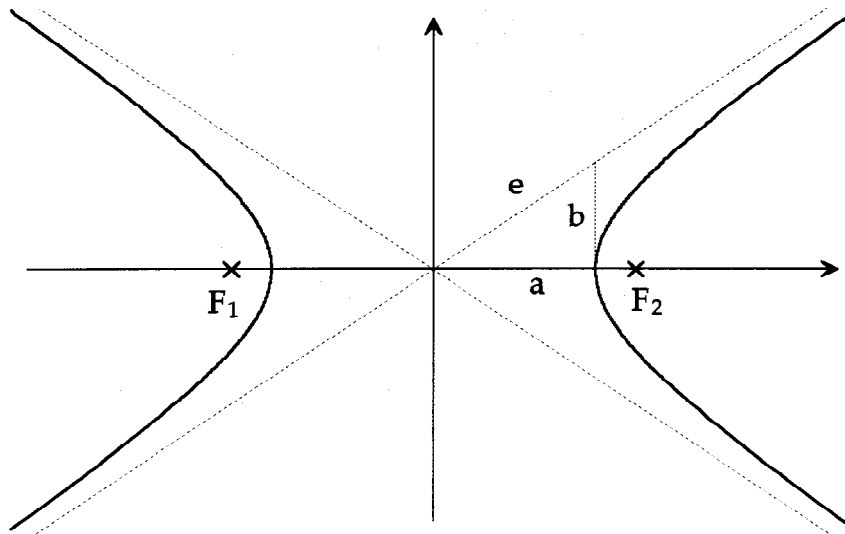
Obr.231 Zdroj uprostřed i mimo střed kruhového pole snímačů.
 Výpočet proveden pro vzájemné korelace všech párů snímačů .
 Emisní signál se šumem.

DODATEK A: ALGORITMUS LOKALIZACE

Níže uvedený algoritmus poskytuje metodu pro analytické řešení průsečíku dvou hyperbol. V dodatku B je uveden výpis programu v jazyce C++ pro počítače IBM PC založený na tomto algoritmu.

Mějme tři snímače, jejichž kartézské souřadnice jsou $[x_1, y_1]$ resp. $[x_2, y_2]$ resp. $[x_3, y_3]$. Hyperboly jsou definovány naměřeným relativním časem příchodu vlny k příslušnému snímači t_1 resp. t_2 resp. t_3 a vlnovou rychlostí v .

Při řešení úlohy nalezení průsečíku hyperbol vyjdeme z parametrické rovnice hyperboly (viz. obr.24)



Obr.24 Hyperbola

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(\varphi)},$$

kde $p = b^2/a$; $\varepsilon = e/a$ ($e > a$) a $e^2 = a^2 + b^2$. Tedy

$$r(\varphi) = \frac{e^2 - a^2}{a - e \cos(\varphi)}.$$

Výše uvedená rovnice hyperboly platí, je-li ohnisko F_2 v počátku souřadnic a ohniska leží na ose x . Je-li hyperbola posunutá (ohnisko má souřadnice $[x_F, y_F]$) a natočená o úhel α vůči ose x , dostaneme pro její složky x a y vztahy

$$x = x_F + \frac{e^2 - a^2}{a - e \cos(\varphi - \alpha)} \cos(\varphi) \quad ,$$

$$y = y_F + \frac{e^2 - a^2}{a - e \cos(\varphi - \alpha)} \sin(\varphi) \quad .$$

Mějme nyní dvě hyperboly, jejichž průsečík (průsečíky) hledáme, definovány následujícími rovnicemi

1. hyperbola

2. hyperbola

$$x = x_1 + \frac{e_1^2 - a_1^2}{a_1 - e_1 \cos(\varphi - \alpha_1)} \cos(\varphi)$$

$$x = x_2 + \frac{e_2^2 - a_2^2}{a_2 - e_2 \cos(\varphi - \alpha_2)} \cos(\varphi)$$

$$y = y_1 + \frac{e_1^2 - a_1^2}{a_1 - e_1 \cos(\varphi - \alpha_1)} \sin(\varphi)$$

$$y = y_2 + \frac{e_2^2 - a_2^2}{a_2 - e_2 \cos(\varphi - \alpha_2)} \sin(\varphi)$$

Body o souřadnicích $[x_1, y_1]$ resp. $[x_2, y_2]$ jsou ohniska hyperbol. Výpočet se podstatně zjednoduší, budou-li mít hyperboly stejné ohnisko. Tento požadavek lze v případě lokalizace snadno splnit, zvolíme-li za toto ohnisko snímač, ke kterému dojde vlna nejdříve (snímač s minimálním relativním časem příchodu vlny). Např. dojde-li vlna nejdříve ke snímači 2, stanovíme hyperboly mezi snímačem 2 a 1 a mezi snímačem 2 a 3, příslušné větve hyperbol budou mít ohnisko v místě snímače 2. Bude-li tedy $x_1 = x_2$, získáme následující rovnici

$$\frac{e_1^2 - a_1^2}{a_1 - e_1 \cos(\varphi - \alpha_1)} - \frac{e_2^2 - a_2^2}{a_2 - e_2 \cos(\varphi - \alpha_2)} = 0 \quad ,$$

kterou lze převést na rovnici typu $A \cos(\varphi) - B \sin(\varphi) = C$ [REK88], kde

$$A = \frac{e_2}{e_2^2 - a_2^2} \cos(\alpha_2) - \frac{e_1}{e_1^2 - a_1^2} \cos(\alpha_1) \quad ,$$

$$B = \frac{e_2}{e_2^2 - a_2^2} \sin(\alpha_2) - \frac{e_1}{e_1^2 - a_1^2} \sin(\alpha_1) \quad ,$$

$$C = \frac{a_2}{e_2^2 - a_2^2} - \frac{a_1}{e_1^2 - a_1^2} \quad .$$

Hledané kořeny φ_1 a φ_2 získáme pomocí vztahů

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= g + h \quad , \\ \varphi_2 &= g - h \quad .\end{aligned}$$

kde

$$g = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \quad \text{a} \quad h = \arccos\left(\frac{C}{A} \cos(g)\right) \quad .$$

Nyní již zbývá pouze otestovat, který z kořenů vyhovuje naší úloze a je tedy hledaným průsečíkem hyperbol, což se provede porovnáním relativních časů příchodů s rozdílem vzdáleností daného průsečíku od snímačů. V některých případech vyhovují oba kořeny, větve hyperbol se protínají ve dvou bodech. V takovém případě mluvíme o dvojznačné lokalizaci a o správném zdroji musí rozhodnout informace z pomocného čtvrtého snímače.

DODATEK B: VÝPIS LOKALIZAČNÍHO PROGRAMU

```
// leden 1994, Petr HORA
//
// Program pro lokalizaci zdroje akustické emise triangulací
//
// TRANS      soubor obsahující souřadnice snímačů           [x y]
// SOURCES    soubor obsahující souřadnice zadaných zdrojů   [x y]
// RESULT     soubor obsahující souřadnice vypočtených zdrojů [x y]
//
//
// !          - zdroj leží na přímce procházející dvěma snímači
// ?          - falešný zdroj byl odstraněn čtvrtým snímačem
//
```

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
```

```
typedef struct { double x, y; } tPoint;
```

```
int main(void)
{
    FILE *fTransducers;
    FILE *fSources;
    FILE *fResult;
    tPoint Told[4];           // původní souřadnice snímačů
    tPoint Tnew[4];          // posunuté souřadnice snímačů
    tPoint Source;           // souřadnice zadaného zdroje
    double Time[4];          // relativní časy příchodů
    double t_min;            // nejmenší relativní čas příchodu
    double Ha1, He1, Halfa1; // poloosa, excentricita a natočení
    double Ha2, He2, Halfa2; // první a druhá hyperbola
    double a, b, c;          // parametry rovnice  $a \cdot \cos(f) + b \cdot \sin(f) = c$ 
    double g, r, h;
    double f1, f2, x1, y1, x2, y2;
    double Velocity = 3.0;   // rychlost šíření
    int i, i_min, i1, i2;
    int OK1, OK2;
    char ATT;
    double D1, D2, D3;

    // načtení souřadnic snímačů
    fTransducers = fopen("TRANS", "rt");
    for (i = 0; i < 4; i++) fscanf(fTransducers, "%lg %lg", &Told[i].x, &Told[i].y);
    fclose(fTransducers);

    fResult = fopen("RESULT", "wt");
    fSources = fopen("SOURCES", "rt");
```

```

do {
// načtení souřadnic zadaného zdroje
fscanf(fSources, "%lg %lg\n", &Source.x, &Source.y);

// výpočet relativních časů příchodů
for (i = 0; i < 4; i++) Time[i] = hypot(Told[i].x - Source.x, Told[i].y - Source.y)/Velocity;

// nalezení minimálního času příchodu a snímače, který je nejbližší
t_min = Time[0];
i_min = 0;
for (i = 1; i < 3; i++) {
if (Time[i] < t_min) {
t_min = Time[i];
i_min = i;
}
}

// výpočet posunutých souřadnic snímačů
for (i = 0; i < 4; i++) {
Time[i] = t_min;
Tnew[i].x = Told[i].x - Told[i_min].x;
Tnew[i].y = Told[i].y - Told[i_min].y;
}

switch (i_min) {
case 0 : i1 = 1; i2 = 2; break;
case 1 : i1 = 0; i2 = 2; break;
case 2 : i1 = 1; i2 = 0; break;
}

// výpočet parametrů 1. hyperboly
He1 = 0.5*hypot(Tnew[i1].x, Tnew[i1].y);
Ha1 = 0.5*Time[i1]*Velocity;
Halfa1 = atan2(-Tnew[i1].y, -Tnew[i1].x);
// výpočet parametrů 2. hyperboly
He2 = 0.5*hypot(Tnew[i2].x, Tnew[i2].y);
Ha2 = 0.5*Time[i2]*Velocity;
Halfa2 = atan2(-Tnew[i2].y, -Tnew[i2].x);
// test existence 1. hyperboly
if (He1 <= Ha1) {
f2 = atan2(-Tnew[i1].y, -Tnew[i1].x);
x1 = Told[i_min].x + (He2*He2-Ha2*Ha2)/(Ha2-He2*cos(f2-Halfa2))*cos(f2);
y1 = Told[i_min].y + (He2*He2-Ha2*Ha2)/(Ha2-He2*cos(f2-Halfa2))*sin(f2);
fprintf(fResult, "Model : %g %g\n", Source.x, Source.y);
fprintf(fResult, "Zdroj : %g %g %c\n\n", x1, y1, 33);
continue;
}

// test existence 2. hyperboly
if (He2 <= Ha2) {
f2 = atan2(-Tnew[i2].y, -Tnew[i2].x);
x1 = Told[i_min].x + (He1*He1-Ha1*Ha1)/(Ha1-He1*cos(f2-Halfa1))*cos(f2);
y1 = Told[i_min].y + (He1*He1-Ha1*Ha1)/(Ha1-He1*cos(f2-Halfa1))*sin(f2);
fprintf(fResult, "Model : %g %g\n", Source.x, Source.y);
}

```

```

    fprintf(fResult, "Zdroj : %g %g %c\n", x1, y1, 33);
    continue;
}

// stanovení parametrů rovnice a*cos(f)+b*sin(f)=c
a = He2*cos(Halfa2)/(He2*He2-Ha2*Ha2)-He1*cos(Halfa1)/(He1*He1-Ha1*Ha1);
b = He2*sin(Halfa2)/(He2*He2-Ha2*Ha2)-He1*sin(Halfa1)/(He1*He1-Ha1*Ha1);
c = Ha2/(He2*He2-Ha2*Ha2) - Ha1/(He1*He1-Ha1*Ha1);

// výpočet kořene rovnice a*cos(f)+b*sin(f)=c
g = atan2(b, a);
r = a/cos(g);
h = acos(c/r);

f1 = g + h;    // 1. kořen
f2 = g - h;    // 2. kořen

x1 = Told[i_min].x + (He1*He1-Ha1*Ha1)/(Ha1-He1*cos(f1-Halfa1))*cos(f1);
y1 = Told[i_min].y + (He1*He1-Ha1*Ha1)/(Ha1-He1*cos(f1-Halfa1))*sin(f1);
x2 = Told[i_min].x + (He1*He1-Ha1*Ha1)/(Ha1-He1*cos(f2-Halfa1))*cos(f2);
y2 = Told[i_min].y + (He1*He1-Ha1*Ha1)/(Ha1-He1*cos(f2-Halfa1))*sin(f2);

// test falešného zdroje
OK1 = OK2 = 0;
ATT = 32;

D1 = (hypot(Told[i1].x-x1, Told[i1].y-y1) - hypot(Told[i_min].x-x1, Told[i_min].y-y1))/Velocity;
D2 = (hypot(Told[i2].x-x1, Told[i2].y-y1) - hypot(Told[i_min].x-x1, Told[i_min].y-y1))/Velocity;

if (fabs(Time[i1]-D1) < 1e-6 && fabs(Time[i2]-D2) < 1e-6) OK1 = 1;

D1 = (hypot(Told[i1].x-x2, Told[i1].y-y2) - hypot(Told[i_min].x-x2, Told[i_min].y-y2))/Velocity;
D2 = (hypot(Told[i2].x-x2, Told[i2].y-y2) - hypot(Told[i_min].x-x2, Told[i_min].y-y2))/Velocity;

if (fabs(Time[i1]-D1) < 1e-6 && fabs(Time[i2]-D2) < 1e-6) OK2 = 1;

if (OK1 && OK2) {
    ATT = 63;
    D3 = (hypot(Told[3].x-x1, Told[3].y-y1) - hypot(Told[i_min].x-x1, Told[i_min].y-y1))/Velocity;
    if (fabs(Time[3]-D3) < 1e-6) OK2 = 0; else OK1 = 0;
}

// výstup výsledků
fprintf(fResult, "Model : %g %g\n", Source.x, Source.y);
if (OK1) fprintf(fResult, "Zdroj : %g %g %c\n", x1, y1, ATT);
if (OK2) fprintf(fResult, "Zdroj : %g %g %c\n", x2, y2, ATT);
fprintf(fResult, "\n");
} while (!feof(fSources));

fclose(fSources);
fclose(fResult);

return 0;
}

```


DODATEK C: KORELACE VE FREKVENČNÍ OBLASTI

Ukážeme výpočet korelační posloupnosti diskrétní Fourierovou transformací [ČÍŽ81]:

$$R_i(x, y) = \sum_{v=0}^{N_1-1} x_v y_{v+1} \quad , \quad -(N_1 - 1) \leq i \leq N_2 - 1$$

kde x_v a y_v jsou konečné reálné posloupnosti; x_v je definováno pro $v = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$ a y_v pro $v = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$. N_1 resp. N_2 je počet prvků posloupnosti x_v resp. y_v . Dále budeme předpokládat, že platí $N_1 = N_2 = N = 2^m$, kde $m = 1, 2, \dots$. Jedná se tedy o posloupnosti stejné délky.

Pokud chceme k výpočtu $R_i(x, y)$ použít diskrétní Fourierovu transformaci a tedy i FFT, musíme respektovat vliv periodizovaných posloupností, se kterými diskrétní Fourierova transformace pracuje.

Použijeme následující postup (viz obr.25):

1) Vytvoříme doplněné posloupnosti délky $M = 2^m$ ($M=2N$)

$${}_d x_v = \begin{cases} x_v & ; v = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & ; v = N, N+1, \dots, M-2 \\ 0 & ; v = M-1 \end{cases}$$

$${}_d y_v = \begin{cases} 0 & ; v = 0, 1, \dots, M-N-2 \\ y_{v-(M-N-1)} & ; v = M-N-1, M-N, \dots, M-2 \\ 0 & ; v = M-1 \end{cases}$$

2) Pomocí FFT vypočteme diskrétní Fourierovu transformaci

$$F_M\{{}_d x_v\} = {}_d X_v \quad ,$$

$$F_M\{{}_d y_v\} = {}_d Y_v \quad .$$

3) Provedeme součin převráceného obrazu první posloupnosti s obrazem druhé posloupnosti

$${}_d Z_k = {}_d X_k^* \cdot {}_d Y_k \quad .$$

Jelikož jsou posloupnosti x_v a y_v reálné, můžeme psát

$${}_dZ_k = {}_dX_k^* \cdot {}_dY_k \quad ,$$

kde * značí komplexně sdruženou hodnotu.

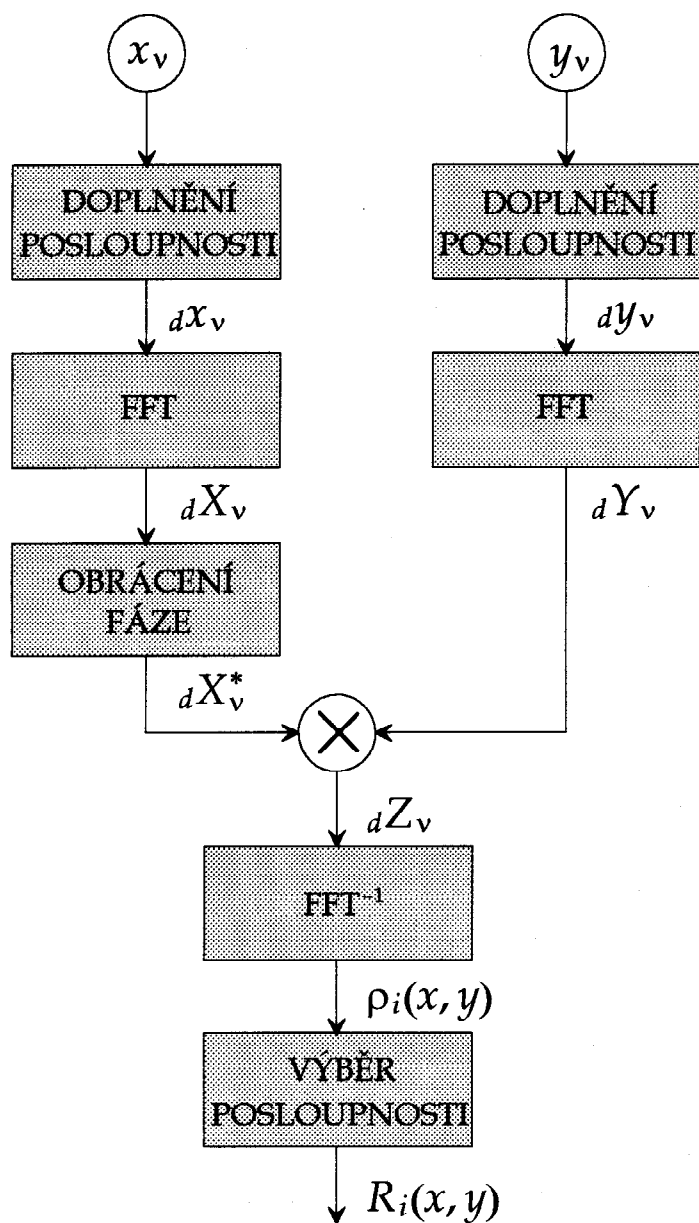
4) Provedeme zpětnou diskrétní Fourierovu transformaci

$$F_M^{-1}\{{}_dZ_k\} = \rho_i(x, y) \quad .$$

5) Určíme

$$R_i(x, y) = \rho_{i+M-N-1}(x, y) \quad ; \quad -(N-1) \leq i \leq N-1$$

Takto dostaneme $2N-1$ ($M-1$) hodnot vzájemné korelace diskrétních posloupností x_v a y_v . Pro další výpočet algoritmu rekonstrukce je výhodné pracovat s posloupnostmi o délce M , na které se dá aplikovat FFT. Z tohoto důvodu bylo $2N-1$ hodnot vzájemné korelace doplněno o jednu hodnotu; poslední člen posloupnosti byl brán dvakrát. Toto doplnění nemá téměř vliv na konečný výsledek rekonstrukce, neboť krajní hodnoty korelační funkce jsou obvykle zanedbatelné.



Obr.25 Korelace ve frekvenční oblasti

DODATEK D: GENEROVÁNÍ ŠUMU

Při generování Gaussovského šumu (tj. šum s normálním rozložením) se vychází z generování náhodných resp. pseudonáhodných čísel s rovnoměrným rozdělením. Generování pseudonáhodných čísel (tato čísla, třebaže jsou vytvářena nenáhodně a mohou se periodicky opakovat, mají vlastnosti, jimiž se blíží náhodným číslům) s rovnoměrným rozdělením je v současné době implementováno téměř v každém vyšším programovacím jazyku, proto je třeba soustředit se pouze na převod rovnoměrného rozdělení na rozdělení normální. Přímou analytickou transformaci v tomto případě nelze použít, neboť transformační vztah

$$\int_{-\infty}^{\xi_k} p(\xi) d\xi = z_k \quad ,$$

kde z_k jsou čísla s rovnoměrným rozdělením v intervalu $(0,1)$, ξ_k jsou čísla s hustotou pravděpodobnosti $p(\xi)$, se nedá pro hustotu pravděpodobnosti normálního rozložení řešit explicitně.

Možnost vytváření náhodných čísel s normálním rozdělením nám však poskytuje centrální limitní věta, podle níž součet $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ velkého počtu náhodných proměnných z_1, z_2, \dots, z_n se stejným rozdělením o střední hodnotě $E(z)$ a rozptylu $D(z)$ má asymptoticky normální rozdělení se střední hodnotou $nE(z)$ a rozptylem $nD(z)$. V praxi se čísla s přibližně normálním rozdělením získávají sčítáním několika náhodných čísel s rovnoměrným rozdělením v intervalu $(0,1)$. V případě 12 čísel $E(z)=1/2$ a $D(z)=1/12$, takže podle vzorce

$$\xi = z_1 + z_2 + \dots + z_{12} - 6 \quad (1)$$

se dostanou čísla ξ s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem, jejichž rozdělení se blíží normálnímu. Relativní rozdíl mezi skutečným rozdělením čísel ξ podle výše uvedeného vztahu a normálním rozdělením roste s absolutní hodnotou ξ . Maximální možná hodnota ξ je ± 6 , zatím co u normálního rozdělení je $\pm\infty$. Avšak u Gaussova rozdělení s rozptylem 1 je pravděpodobnost pro $\xi = \pm 6$ přibližně 10^{-9} . Toto omezení je tedy nepodstatné.

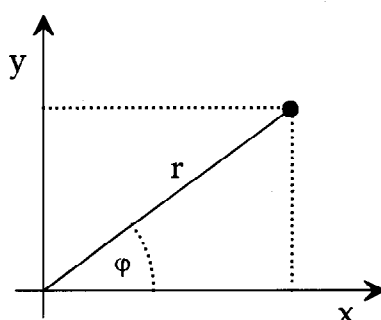
Jiná možnost generování posloupnosti čísel s normálním rozložením, které lépe vystihuje konce Gaussovy funkce, je popsána v [SCH75]. Je známo, že jestliže v kartézských souřadnicích jsou vertikální (g_1) a horizontální (g_2) chyby souřadnice bodu nezávislé a jejich hustota pravděpodobnosti odpovídá normálnímu rozložení

$$f_g(g_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-g_i^2/2\sigma^2} \quad ; \quad i = 1, 2,$$

potom polární souřadnice r a φ vzorového bodu (viz obr.26) jsou taktéž nezávislé náhodné proměnné s hustotami

$$f_r(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} \quad ; r \geq 0 \quad \text{a} \quad f_r(r) = 0 \quad ; r < 0 \quad (2)$$

$$f_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad ; 0 \leq \varphi \leq 2\pi;; \quad \text{a} \quad f_\varphi(\varphi) = 0;; \quad ; \varphi \notin (0, 2\pi) \quad (3)$$



Obr.26 Polární souřadnice

Vztah (2) je znám jako Rayleighova hustota a vztah (3) popisuje rovnoměrné rozložení uvnitř intervalu $(0, 2\pi)$. Dvě nezávislé Gaussovské proměnné jsou potom vytvořeny následujícími operacemi

$$g_1 = r \cos(\varphi) \quad , \quad g_2 = r \sin(\varphi) \quad ,$$

kde r a φ jsou generovány podle vztahů (2) a (3). Vyjádříme-li r a φ pomocí čísel s rovnoměrným rozložením z intervalu $(0,1)$, dostaneme

$$g_1 = \sqrt{-2 \ln(z_1)} \cos(2\pi z_2) \quad ,$$

$$g_2 = \sqrt{-2 \ln(z_1)} \sin(2\pi z_2) \quad .$$

LITERATURA

- AST78 Asty, M.:
Acoustic Emission Source Location on a Spherical or Plane Surface.
NDT International, October 1978, s.223-226
- BLA Blake, W.; Leighton, F.; Duvall, W.I.:
Microseismic Techniques for Monitoring the Behaviour of Rock Structures.
U.S.Bureau of Mines, Bulletin 665.
- ČÍŽ81 Čížek, V.:
Diskrétní Fourierova transformace a její použití.
SNTL Praha, 1981
- KAY66 Kaye, G.W.C.; Laby, T.H.:
Tables of physical and chemical constants.
13th ed. 1966. Longmans, Green & Co. Ltd.
- KOR77 Koreněv, B.G.:
Úvod do teorie Besselových funkcí,
SNTL Praha, 1977
- NOR87 Norton, S.J.; Linzer, M.:
Backprojection reconstruction of random source distributions.
J.Acoust.Soc.Am. 81, (4), April 1987
- OBA78 Obata, Y.; Bentley, P.G.:
Acoustic Emission Test on a 1 Metre Diameter Pressure Vessel
with a 60% Artificial Defect.
4th International Meeting on Acoustic Emission, Tokyo, 18 Sept. 1978.
- REK88 Rektorys, K.:
Přehled užití matematiky,
SNTL Praha, 1988
- RIN80 Rindorf, H.J.:
Acoustic emission source location in theory and in practice.
Brüel&Kjaer Technical Review 1980
- SCH75 Schwartz, M.; Shaw, L.:
Signal Processing: Discrete Spectral Analysis, Detection and Estimation
McGraw-Hill, New York, 1975, Sec.5.6.
- TOB76 Tobias, A.:
Acoustic Emission Source Location in Two Dimensions
by an Array of Three Transducers.
Non-Destructive Testing, February 1976, s.9-12