
Československá akademie věd
Ústav technologie a spolehlivosti strojních konstrukcí
Plzeň, Veleslavínova 11

Autor: Ing. Petr Hora, CSc.

MDT:
(539.37+539.63):517

STUDIE JEDNOTLIVÝCH ŘEŠENÍ NAPJATOSTI POLOPROSTORU
PŘI POVRCHOVÉM PŘÍMKOVÉM BUZENÍ

Číslo zprávy: 103 VP
Číslo kopie:

Vedoucí grantu: Ing. František Valeš, CSc.
Ředitel ústavu: Ing. František Valeš, CSc.

Plzeň, listopad 1991

ROZDĚLOVNÍK:

Výtisk číslo	1	archivní výtisk
	2	knihovna ÚTSSK ČSAV
	3	Ing. Petr Hora, CSc., ÚTSSK ČSAV
	4	Ing. František Valeš, CSc., ÚTSSK ČSAV
	5	Doc. Ing. Rudolf Brepta, DrSc., Praha
	6	Ing. Jan Červ, CSc., ÚT ČSAV
	7	Ing. Jiří Pátek, ÚTSSK ČSAV
	8	RNDr. Eva Štěpánková, ÚTSSK ČSAV

Obsah

I. Seznam použitých symbolů	5
II. Úvod	6
III. Lambovo řešení	8
IV. Řešení pomocí integrálních transformací	25
V. Závěr	59
VI. Seznam použité literatury	60

I. Seznam použitých symbolů

c_R	- rychlost Rayleighových vln
$H(t)$	- Heavisideova funkce
r, ϑ	- polární souřadnice
s	- vektor posunutí
t	- čas
u, v, w	- složky vektoru posunutí v kartézských souřadnicích
u_r, u_ϑ	- složky vektoru posunutí v polárních souřadnicích
x, y, z	- kartézské souřadnice
α	- rychlost dilatační vlny v trojrozměrném kontinuu
β	- rychlost příčných vln
γ	- vlnové číslo
$\delta(t)$	- Diracova funkce
λ, μ	- Laméovy konstanty
ρ	- hustota
σ	- napětí
φ	- skalární potenciál
Ψ	- vektorový potenciál
Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3	- složky vektorového potenciálu
ω	- úhlová frekvence
$\dot{}$	- tečka nad symbolem označuje derivaci podle času

Ve zprávě je použito anglosaské značení Laméových konstant (λ a μ). Pro Poissonovo číslo se používá symbolu σ , které je, aby nedošlo k záměně se symboly pro mechanická napětí, vždy bez indexů.

Má-li symbol více významů, je jeho lokální význam podrobně vysvětlen v příslušné části textu, kde se používá.

II. Úvod

Předkládaná zpráva se zabývá řešením napjatosti poloprostoru při povrchovém přímkovém buzení. Tato problematika již byla důkladně studována, ale poněvadž metody řešení tohoto problému tvoří jeden ze základů přesné paprskové metody, jejíž zvládnutí a následná aplikace na problematiku akustické emise je dílčím cílem grantu ČSAV č.27007/91, považuji za účelné popsat v této zprávě metody řešení uvedeného problému podrobněji.

První z popisovaných metod bude metoda Lambova. Tato metoda je popsána v Lambově článku z roku 1904 [LAM04], kde je poprvé uvažován případ polonekonečného prostředí (poloprostoru), na jehož povrch působí impulsní síla podél přímky nebo v bodě. Řešení těchto problémů odvodil Lamb Fourierovou syntézou z řešení ustáleného stavu. Popis této metody, který je obsahem třetí kapitoly, vychází z druhé kapitoly [EWI57] "Homogeneous and isotropic half space".

Druhou popisovanou metodou je metoda integrálních transformací, která poskytuje přímější a kompaktnější cestu pro odvození řešení tohoto problému. Na problému napjatosti poloprostoru při povrchovém přímkovém buzení si ukážeme výhody integrálních transformací a Cagniardovy metody zpětné Laplaceovy transformace. Uvedený problém je dvourozměrný, a proto bude zpracován dvojitou integrální transformací. Jednou z těchto transformací je Laplaceova transformace, zavedená k redukci časové proměnné jako u jednorozměrných problémů. Typ druhé transformace, pro redukci prostorové proměnné, závisí na geometrii úlohy a typu okrajových podmínek; v našem případě půjde o transformaci Fourierovu. Popis metody integrálních transformací tvoří podstatnou část čtvrté kapitoly a vychází z šesté kapitoly [MIK78] "Transient waves in an elastic half space".

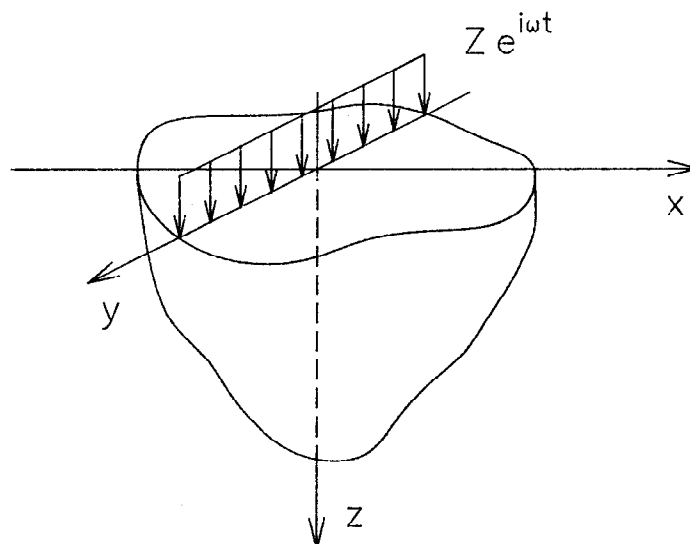
Výběr uvedeného problému nebyl náhodný. Problém napjatosti poloprostoru při povrchovém přímkovém buzení patří z hlediska geometrie mezi nejjednodušší případy, avšak při

jeho řešení narazíme nejen na póly ale i na body rozvětvení, které se např. u problému tlusté desky nevyskytují. Jde tedy z matematického hlediska o problém, který má složitější okrajové podmínky než problém tlusté desky. Podrobné řešení tlusté desky je uvedeno v [VAL83] a [VAL84]. Dalším důvodem pro výběr tohoto problému byly požadavky experimentu na povrchové buzení. Vnitřními zdroji v poloprostoru se zabýval Nakano [NAK25] a Lapwood [LAP49].

Získané analytické výsledky budou dále sloužit při odlaďování programů přesné paprskové metody. Z tohoto důvodu byl proveden i výpočet výchylek na povrchu i uvnitř poloprostoru při povrchovém buzení s časovou závislostí danou Heavisideovou skokovou funkcí.

III. LAMBOVO ŘEŠENÍ

V této části uvažujeme dvojrozměrný problém a odvodíme výrazy pro povrchové výchylky vyvolané periodickou silou působící kolmo k volnému povrchu podél přímky, která je shodná s osou y (obr. 3.1).



Obr. 3.1

Výchylky jsou dány vztahem [Ewing]

$$s(u, v, w) = \text{grad } \varphi + \text{rot } \Psi(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \quad , \quad (3.1)$$

kde s - vektor výchylky se složkami (u, v, w) ,

φ - skalární potenciál,

Ψ - vektorový potenciál se složkami (ψ_1, ψ_2, ψ_3) .

V našem dvojrozměrném případě, kdy $v=0$ a $\partial/\partial y=0$, můžeme tedy psát (index 2 u vektorového potenciálu ψ vynecháváme)

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad ; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \quad (3.2)$$

Funkce φ a Ψ jsou řešením vlnových rovnic [EWI57]

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} ; \quad \nabla^2 \psi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

V našem případě se druhá rovnice zjednoduší pouze na

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

(index 2 u vektorového potenciálu ψ opět vynecháváme).

Vliv periodické síly působící kolmo k volnému povrchu je vyjádřen okrajovými podmínkami

$$\left[\sigma_{zx} \right]_{z=0} = 0 \quad \text{a} \quad \left[\sigma_{zz} \right]_{z=0} = Z e^{i(\omega t - \gamma x)} , \quad (3.5)$$

kde amplituda Z závisí pouze na γ (γ je vlnové číslo, pro které platí $\gamma = \omega/c$, kde c je fázová rychlost). Nadále budeme z důvodu úspory místa vynechávat činitel $e^{i\omega t}$.

Napětí σ_{zx} a σ_{zz} jsou dána vztahy [EWI57]

$$\sigma_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \text{a} \quad \sigma_{zz} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} . \quad (3.6)$$

Vyjádríme-li u a w pomocí potenciálů (3.2), dostaneme

$$\sigma_{zx} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (3.7)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right)$$

Potenciály φ a ψ píšeme ve tvaru [LAM04]

$$\varphi = A e^{-\nu z - i\gamma x} \quad \psi = B e^{-\nu' z - i\gamma x} , \quad (3.8)$$

kde $\nu^2 = \gamma^2 - k_\alpha^2$; $\nu'^2 = \gamma^2 - k_\beta^2$; $k_\alpha = \omega/\alpha$ a $k_\beta = \omega/\beta$.

A a B jsou funkce parametru γ a musí vyhovovat okrajovým podmínkám (3.5). Vložení potenciálů (3.8) do okrajových podmínek (3.15) při použití vztahů (3.7) dostaneme

$$\begin{aligned} 2i\gamma\nu A - (\gamma^2 - k_\beta^2)B &= 0 \\ (2\gamma^2 - k_\beta^2)A + 2i\gamma\nu' B &= Z/\mu \end{aligned} \quad (3.9)$$

Po vyřešení této soustavy rovnic dostaneme

$$A = \frac{2\gamma^2 - k_\beta^2}{F(\gamma)} \frac{Z(\gamma)}{\mu} \quad B = \frac{2i\gamma\nu}{F(\gamma)} \frac{Z(\gamma)}{\mu} \quad (3.10)$$

kde

$$F(\gamma) = (2\gamma^2 - k_\beta^2)^2 - 4\nu\nu'\gamma^2 \quad (3.11)$$

je Rayleighova funkce.

Nyní budeme superponovat nekonečný počet napěťových distribucí tvaru (3.5) tak, že výsledek bude koncentrovaný přímkový zdroj. Provedeme proto ve vztahu (3.5) substituci $Z = -Q \, d\gamma/2\pi$ a integraci vzhledem ke γ od $-\infty$ do ∞

$$\left[\sigma_{zz} \right]_{z=0} = f(x) = -\frac{Q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\gamma x} \, d\gamma \quad (3.12)$$

Potom, jestliže vložíme do (3.12) vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) e^{i\gamma\zeta} \, d\zeta = -Q(\gamma) \quad , \quad (3.13)$$

získáme Fourierův integrál

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\gamma x} \, d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) e^{i\gamma\zeta} \, d\zeta \quad (3.14)$$

reprezentující rozložení normálového povrchového napětí. Abychom získali koncentrovanou normálovou sílu v $x=0$, představme si, že normálová síla $f(x)$ podél osy x vymizí všude mimo $x=0$, kde se bude blížit ∞ tak, že $\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \, d\zeta = -Q$ je konečný. Potom se rovnice (3.14) redukuje na rovnici (3.12) s konstantním Q .

Máme-li napětí specifikováno vztahem (3.12), může být výchylka v libovolném bodě na povrchu $z=0$ zapsána [pomocí vztahů (3.2), (3.8) a (3.10)] jako

$$u_0 = \frac{iQ}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(2\gamma^2 - k_\beta^2 - 2\nu\nu')}{F(\gamma)} e^{-i\gamma x} d\gamma \quad (3.15)$$

$$w_0 = \frac{-Q}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_\beta^2 \nu}{F(\gamma)} e^{-i\gamma x} d\gamma$$

Tyto integrály nemohou být vyhodnoceny přímou integrací a výpočet numerickou integrací je mimořádně obtížný. Jedním z přístupů je nahrazení integrační proměnné γ komplexní proměnnou ζ a použít křivkové integrace v rovině ζ . Budeme tedy vyhodnocovat integrály tvaru

$$\int \Phi(\zeta) d\zeta = \int \frac{\zeta(2\zeta^2 - k_\beta^2 - 2\sqrt{\zeta^2 - k_\alpha^2} \sqrt{\zeta^2 - k_\beta^2})}{(2\zeta^2 - k_\beta^2)^2 - 4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - k_\alpha^2} \sqrt{\zeta^2 - k_\beta^2}} e^{-i\gamma\zeta} d\zeta \quad (3.16)$$

$$\int \Psi(\zeta) d\zeta = \int \frac{k_\beta^2 \sqrt{\zeta^2 - k_\alpha^2}}{(2\zeta^2 - k_\beta^2)^2 - 4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - k_\alpha^2} \sqrt{\zeta^2 - k_\beta^2}} e^{-i\gamma\zeta} d\zeta \quad (3.17)$$

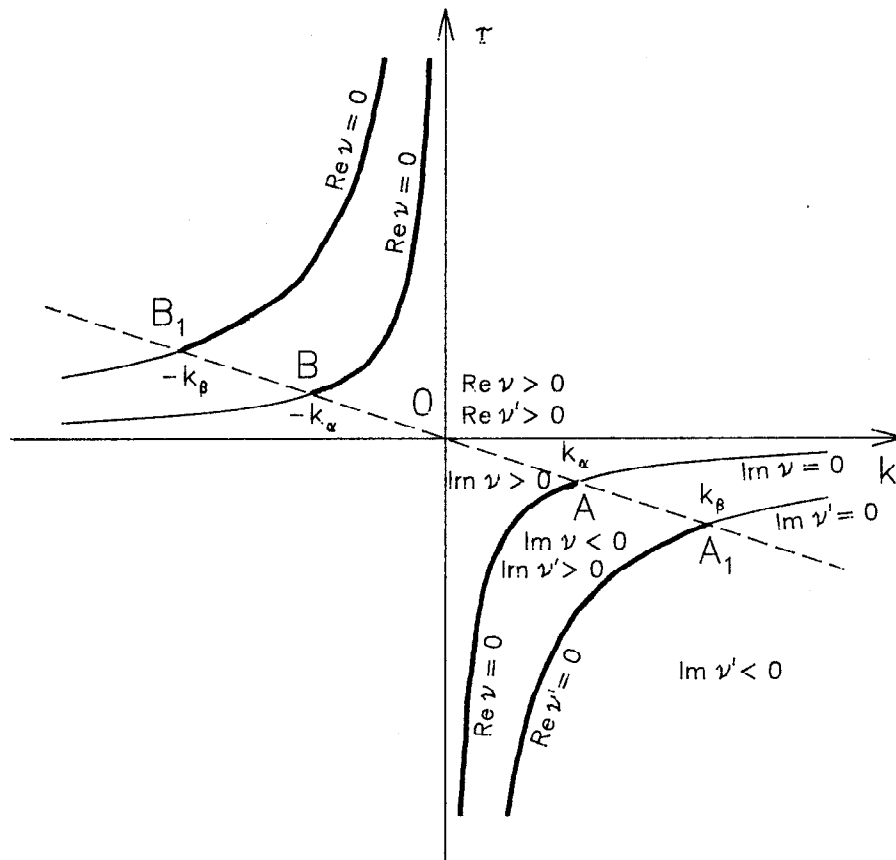
kteřé se objevují v řešeních (3.15) reprezentujících povrchové výchylky pro povrchový přímkový zdroj. Poznamenejme nejprve, že, je-li ζ komplexní proměnná, $\zeta = \gamma + i\tau$, má integrand $\Phi(\zeta)$ nebo $\Psi(\zeta)$ reálné póly $(\pm\kappa, 0)$ určené nulami κ funkce $F(\zeta)$; $F(\zeta)$ je jmenovatel integrandu ve vztazích (3.16) a (3.17). Body rozvětvení $(\pm k_\alpha, 0)$ a $(\pm k_\beta, 0)$ jsou zavedeny odmocninami $\nu = \pm\sqrt{\zeta^2 - k_\alpha^2}$ a $\nu' = \pm\sqrt{\zeta^2 - k_\beta^2}$. Existence bodů rozvětvení plyne z požadavku učinit integrandy holomorfními funkcemi, aby mohla být dále aplikována Cauchyho věta. Toho se dosáhne zavedením řezu v komplexní rovině. Znaménka odmocnin ν a ν' budou určena podmínkami $\text{Re}\{\nu\} \geq 0$ a $\text{Re}\{\nu'\} \geq 0$, poněvadž tímto výběrem se vyhneme nekonečné hodnotě potenciálu φ při $z \rightarrow \infty$.

V (3.16) a (3.17) jsou body rozvětvení $\pm k_\alpha$ a $\pm k_\beta$ umístěny na reálné ose, ale jsou-li aplikovány metody operátorového počtu, musí být uvažovány také komplexní hodnoty ω . Proto

budeme provádět nejprve řezy pro komplexní $k_\alpha = \omega/\alpha$ a $k_\beta = \omega/\beta$. Riemannova plocha pro integrand (3.16), (3.17) má čtyři listy; čtyři kombinace znamének u ν a ν' . Přípustný list je určen podle výše uvedených požadavků $\text{Re}(\nu) \geq 0$ a $\text{Re}(\nu') \geq 0$. Tedy řezy budou dány $\text{Re}(\nu) = 0$ a $\text{Re}(\nu') = 0$. Pro komplexní $\omega = s - i\sigma$, máme $k_\alpha = (s - i\sigma)/\alpha$ a $k_\beta = (s - i\sigma)/\beta$. $\text{Re}(\nu) = 0$, kde $\nu^2 = \zeta^2 - k_\alpha^2$, vyžaduje, aby $\gamma^2 - \tau^2 + 2i\gamma\tau - (s^2 - \sigma^2 - 2is\sigma)/\alpha^2$ bylo reálné a záporné, nebo-li

$$\gamma\tau = -s\sigma/\alpha^2 \quad \text{a} \quad \gamma^2 - \tau^2 < (s^2 - \sigma^2)/\alpha^2 \quad (3.18)$$

První z těchto podmínek nám říká, že pro $s > 0$ musí body rozvětvení a řezy ležet tak, jak je zobrazeno na obr. 3.2, tyto řezy jsou částí hyperbol. Druhá podmínka definuje část hyperboly, která je použita jako řez.



Obr. 3.2

Abychom zjednodušili další diskusi, budeme předpokládat, že existuje pouze jeden pár bodů rozvětvení $\pm k_\alpha$. Pro reálné ω ,

tj. $\sigma=0$, přejdou podmínky (3.18) do tvaru

$$\gamma\tau = 0 \qquad \gamma^2 - \tau^2 < s^2 / \alpha^2 \qquad (3.19)$$

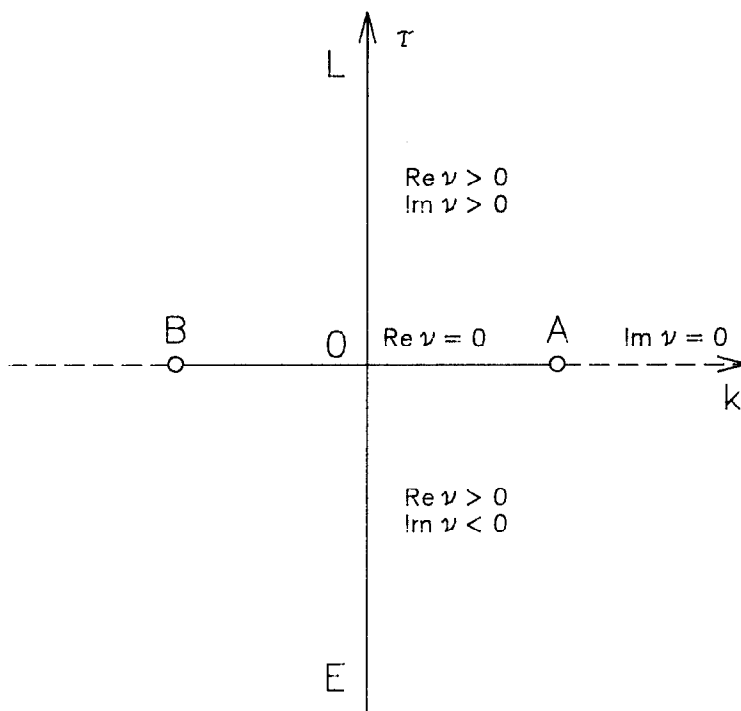
Z nich vyplývá, že buď

$$\tau = 0 \qquad \gamma^2 < s^2 / \alpha^2 \qquad (3.20)$$

nebo

$$\gamma = 0 \qquad -\tau^2 < s^2 / \alpha^2 \qquad (3.21)$$

Tedy, poněvadž podmínka $\text{Re}\{\nu\} \geq 0$ omezuje výběr řezu, můžeme použít podle (3.20) část reálné osy mezi bodem rozvětvení $-k_\alpha(B)$ a $k_\alpha(A)$ (viz obr. 3.3). Imaginární osa určená podmínkami (3.21) není nezávislý řez, poněvadž neprochází bodem rozvětvení. Avšak imaginární osa může být použita, jestliže je zkombinována s přípustnou částí reálné osy pro vytvoření řezů AOE a BOL, jak je zobrazeno na obr. 3.3.



Obr. 3.3

Řezy AOE a BOL se potom jeví jako limitní případ těch částí hyperbol (obr. 3.2), které jsou řezy při komplexním ω .

Při reálném ω $\text{Re}\{\nu\}$ nemění v pravé (ani v levé) polo-

rovině znaménko. Pouze pro $\zeta = \gamma \geq k_\alpha$, tj. na $A\gamma$ v obr. 3.3, $\text{Im}\{\nu\} = 0$. Tedy pro libovolnou přípustnou cestu v pravé polo-
rovině $\text{Im}\{\nu\}$ může měnit znaménko pouze při protnutí $A\gamma$.

Nyní z transformace

$$\zeta = k_\alpha + \delta e^{i\vartheta} \quad (-\pi < \vartheta < \pi) \quad (3.22)$$

kde ϑ je měřeno od osy γ , dostaneme pro malou oblast okolo A
při zanedbání δ^2

$$\nu = + \sqrt{2\gamma \delta_\alpha} e^{i\vartheta/2} = \sqrt{2\gamma \delta_\alpha} [\cos(\vartheta/2) + i \sin(\vartheta/2)] \quad (3.23)$$

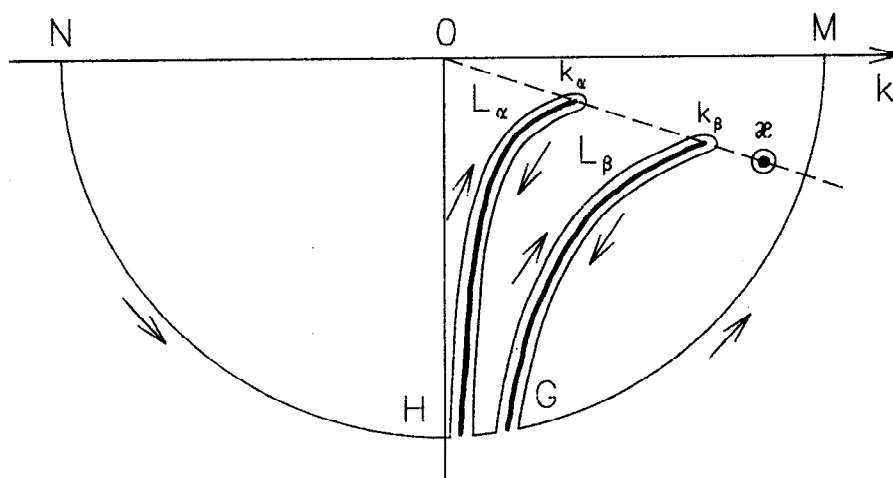
Z předchozího je zřejmé, že pro všechny přípustné cesty
v pravé polorovině $\text{Re}\{\nu\} > 0$ a $\text{Im}\{\nu\} > 0$ v prvním a $\text{Im}\{\nu\} < 0$ ve
čtvrtém kvadrantu.

Pro komplexní ω je $\text{Re}\{\nu\} = 0$ na první části hyperboly
určené rovnicemi (3.18). $\text{Im}\{\nu\}$ je nulová v druhé části dané
(3.18). $\text{Im}\{\nu\}$ je podél řezové čáry nespojitá, kladná na levé
straně a záporná na pravé straně řezu (viz obr. 3.2).
Abychom určili znaménko $\text{Im}\{\nu\}$, zavedeme úhel $-\pi < \vartheta < \pi$ měřený
od AT, tečna k hyperbolickému řezu (viz obr. 3.2). Podle
stejně procedury jako pro reálné ω , můžeme určit znaménka,
která jsou uvedena na obr. 3.2.

Lamb [LAM04] ukázal, že Rayleighovy vlny jsou nejvíce
patrné v povrchovém bodě hodně vzdáleném od povrchového
impulsu. Navíc našel další členy reprezentující vlny, které
se s rostoucí vzdáleností od zdroje zmenšují rychleji. Nyní
vyhodnotíme členy pro povrchové vlny. Jestliže uvažujeme
integrály (3.15) pro reálné ω , pak jsou singulární body
integrandu umístěny na integrační cestě a musí být použity
hlavní hodnoty integrálů (tak to dělal Lamb). Předpoklad
komplexního ω přemístí body k_α a k_β stejně jako kořeny x
rovnice $F(\zeta) = 0$ z reálné osy γ na přímku procházející počát-
kem, jejíž sklon je $\text{Im}\{\omega\}/\text{Re}\{\omega\}$. Proto se zdá výhodnější
uvažovat nejprve křivku znázorněnou na obr. 3.4 a potom
vyšetřovat limitní případ reálného ω .

Uvažujme nyní např. integrál (3.16); pro ten platí

$$\oint \Phi(\zeta) d\zeta = \int_M^N + \int_N^H + \int_{L_\alpha} + \int_{L_\beta} + \int_G^M = 2\pi i \sum \text{Res} \quad (3.24)$$



Obr. 3.4

Podle Jordanova lema je příspěvek od oblouků NH a GM, které mají nekonečně velký poloměr, nulový. Tedy integrál podél reálné osy je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\gamma) d\gamma = \int_N^M = - \int_M^N = -2\pi i \sum \text{Res} + \int_{L_\alpha} + \int_{L_\beta} \quad (3.25)$$

V tomto případě existuje pouze jediný pól (x) a integrály podél smyček L_α a L_β jsou integrály podél řezů. Použijeme-li pro residuum integrandu $M(x)/N(x)$ v pólu $x=a$ výraz $M(a)/N'(a)$, můžeme psát vztahy (3.16) a (3.17) jako

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(2\gamma^2 - k_\beta^2 - 2\nu\nu')}{F(\gamma)} e^{-i\gamma x} d\gamma = 2\pi i H e^{-i x x} + \int_{L_\alpha} \Phi(\zeta) d\zeta + \int_{L_\beta} \Phi(\zeta) d\zeta \quad (3.26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_\beta^2 \nu}{F(\gamma)} e^{-i\gamma x} d\gamma = 2\pi i K e^{-i x x} + \int_{L_\alpha} \Psi(\zeta) d\zeta + \int_{L_\beta} \Psi(\zeta) d\zeta \quad (3.27)$$

kde

$$H = - \frac{x(2x^2 - k_\beta^2 - 2\sqrt{x^2 - k_\alpha^2}\sqrt{x^2 - k_\beta^2})}{F'(x)} \quad (3.28)$$

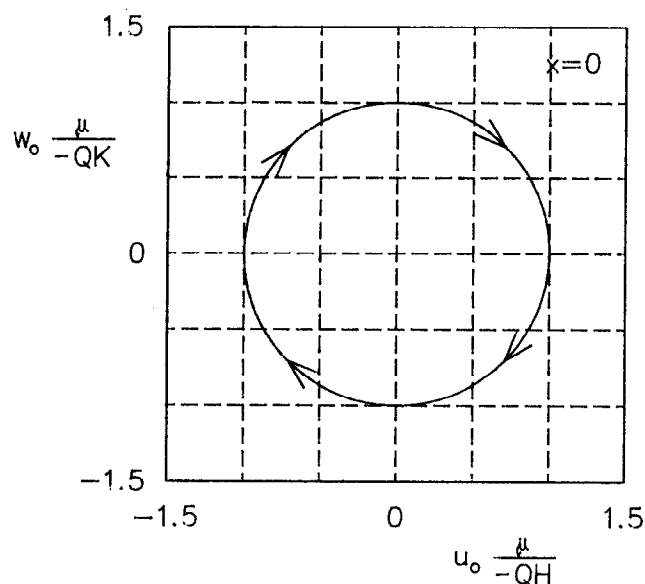
$$K = - \frac{k_\beta^2 \sqrt{x^2 - k_\alpha^2}}{F'(x)}$$

Aplikujeme-li tyto výsledky do integrálů pro výchylky vyvolané povrchovým přímkovým zdrojem (3.15), získáme

$$u_0 = - \frac{Q H}{\mu} e^{i(\omega t - \kappa x)} + \dots \quad (3.29)$$

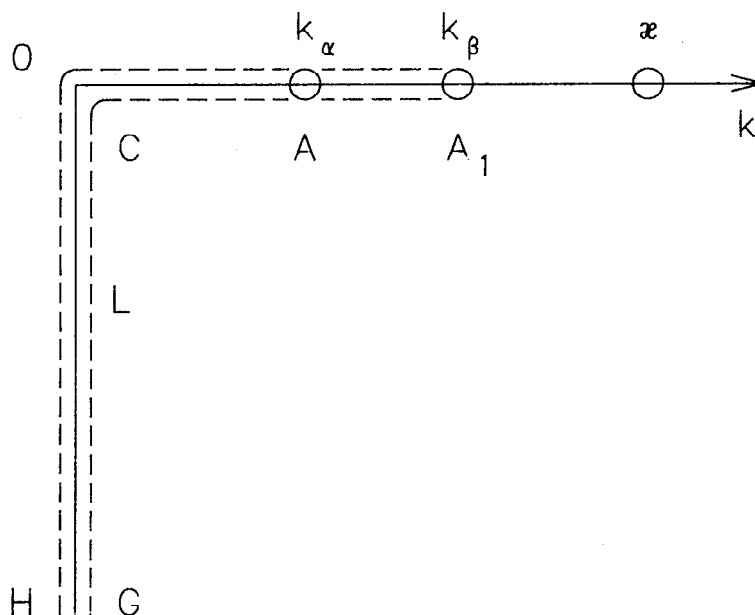
$$w_0 = - \frac{i Q K}{\mu} e^{i(\omega t - \kappa x)} + \dots$$

kde členy odvozené z integrálů podél řezů zatím chybí. První členy vztahů (3.29) jsou dány příspěvkem pólu v integrandu (3.15) a představují sled Rayleighových vln putujících od zdroje s amplitudou výchylky nezávislou na x . Rychlost je dána rychlostí Rayleighových vln, poněvadž κ je kořen Rayleighovy rovnice $F(\gamma)=0$ [viz vztah (3.11)]. Je zřejmé, že oběžná dráha částice povrchu (viz obr. 3.5) je zpětně eliptická. Poměr vertikální a horizontální amplitudy je K/H ; tento poměr je stejný jako poměr u volných Rayleighových vln.



Obr. 3.5

Abychom získali další informace o vlnách reprezentovaných integrály podél řezů, vyzkoušíme nejprve pro reálné ω poslední dva členy v rovnicích (3.26) a (3.27). V tomto případě degenerují dvě smyčky L_α a L_β na smyčku jednu (L) s body rozvětvení k_α a k_β na reálné ose. Tato smyčka je znázorněna na obr. 3.6.



Obr. 3.6

Řez A_1AOH získaný stažením dvou hyperbol je charakterizován podmínkami $\text{Re}(\nu')=0$ podél celého řezu a $\text{Re}(\nu)=0$ podél jeho části AOH . Za podmínek uvedených dříve imaginární části ν a ν' jsou nespojitě podél odpovídajícího řezu. $\text{Im}(\nu)$ a $\text{Im}(\nu')$ jsou kladné v prvním kvadrantu a na levé straně řezu OH a záporné ve čtvrtém kvadrantu. Např. vztah (3.16)

$$\int_L \frac{\zeta(2\zeta^2 - k_\beta^2 - 2\nu\nu')}{(2\zeta^2 - k_\beta^2)^2 - 4\zeta^2\nu\nu'} e^{-i\zeta x} d\zeta. \quad (3.30)$$

Vidíme, že integrand je funkcí součinu $\nu\nu'$. Na části smyčky HOA má součin $\nu\nu'$ stejnou hodnotu jako na GCA (viz obr. 3.6) a odpovídající část integrálu podél L zmizí. Potom se integrál (3.16) podél řezu L zredukuje na

$$I_1 = \int_{k_\alpha}^{k_\beta} \left\{ \frac{\gamma(2\gamma^2 - k_\beta^2 - 2\nu\nu_1')}{(2\gamma^2 - k_\beta^2)^2 - 4\gamma^2\nu\nu_1'} - \frac{\gamma(2\gamma^2 - k_\beta^2 - 2\nu\nu_2')}{(2\gamma^2 - k_\beta^2)^2 - 4\gamma^2\nu\nu_2'} \right\} e^{-i\gamma x} d\gamma \quad (3.31)$$

kde $\nu = \sqrt{\gamma^2 - k_\alpha^2}$
 $\nu_1' = \text{Im}(\nu') > 0$ v prvním kvadrantu (3.32)
 $\nu_2' = \text{Im}(\nu') < 0$ ve čtvrtém kvadrantu.

Poněvadž blízko OA_1 je $\nu_2' = -\nu_1'$, můžeme (3.31) napsat ve tvaru

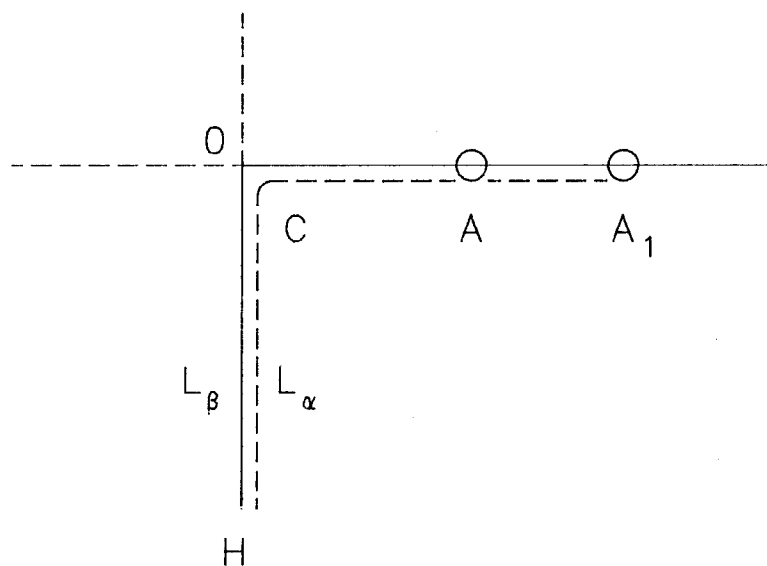
$$I_1 = 4k_\beta^2 \int_{k_\alpha}^{k_\beta} \frac{(2\gamma^2 - k_\beta^2)\nu\nu_1'\gamma}{(2\gamma^2 - k_\beta^2)^4 - 16\gamma^4\nu^2\nu_1'^2} e^{-i\gamma x} d\gamma \quad (3.33)$$

Součin $e^{i\omega t}$ a (3.33) může být interpretován jako soubor vln, které se šíří rychlostmi v rozsahu od α do β . Velice rychlé změny činitele $e^{-i\gamma x}$ pro zvětšující se x vyvolávají zmenšování hodnot integrandu (3.33). Integrály typu (3.17) nemohou být podobně zredukovány, protože činitel ν je sám a části od HOA a GCA se již nevyruší. Výsledná hodnota (3.17) je

$$I_2 = 2k_\beta^2 \int_{\infty}^0 \frac{i\sqrt{\tau^2 + k_\alpha^2}}{F(-i\tau)} e^{-\tau x} d(-i\tau) + 2k_\beta^2 \int_0^{k_\alpha} \frac{\nu_1}{F(\gamma)} e^{-i\gamma x} d(\gamma) + 8k_\beta^2 \int_{k_\alpha}^{k_\beta} \frac{\gamma^2\nu^2\nu_1'}{(2\gamma^2 - k_\beta^2)^4 - 16\gamma^4\nu^2\nu_1'^2} e^{-i\gamma x} d\gamma \quad (3.34)$$

Tento výraz byl uveden Lambem [LAM04].

Abychom získali výrazy, které poskytnou více informací o souboru vln (3.33), vrátíme se nyní ke dvou smyčkám L_α a L_β (viz obr. 3.4). Pro reálné ω tyto křivky zužujeme, ale udržujeme je oddělené, dále se přidržíme úmluvy o hodnotách ν a ν' na různých stranách (svazích, březích) těchto smyček, jak je uvedeno na obr. 3.7.



Obr. 3.7

Jestliže vložíme $\nu = \nu_1 = \text{Im}(\nu) > 0$, potom např. (3.31) musí být nahrazena

$$\begin{aligned}
 \int_{L_\alpha} = & \int_{-i\infty}^0 \left\{ \frac{\zeta(2\zeta^2 - k_\beta^2 - 2\nu_1 \nu_1')}{(2\zeta^2 - k_\beta^2)^2 - 4\zeta^2 \nu_1 \nu_1'} - \frac{\zeta(2\zeta^2 - k_\beta^2 + 2\nu_1 \nu_1')}{(2\zeta^2 - k_\beta^2)^2 + 4\zeta^2 \nu_1 \nu_1'} \right\} e^{-i\zeta x} d\zeta \\
 & + \int_0^{k_\alpha} \left\{ \frac{\gamma(2\gamma^2 - k_\beta^2 - 2\nu_1 \nu_1')}{(2\gamma^2 - k_\beta^2)^2 - 4\gamma^2 \nu_1 \nu_1'} - \frac{\gamma(2\gamma^2 - k_\beta^2 + 2\nu_1 \nu_1')}{(2\gamma^2 - k_\beta^2)^2 + 4\gamma^2 \nu_1 \nu_1'} \right\} e^{i\gamma x} d\gamma
 \end{aligned}
 \tag{3.35}$$

a

$$\begin{aligned}
\int_{L_\beta} = & \int_{-i\infty}^0 \left\{ \frac{\zeta(2\zeta^2 - k_\beta^2 + 2\nu_1 \nu_1')}{(2\zeta^2 - k_\beta^2)^2 + 4\zeta^2 \nu_1 \nu_1'} - \frac{\zeta(2\zeta^2 - k_\beta^2 - 2\nu_1 \nu_1')}{(2\zeta^2 - k_\beta^2)^2 - 4\zeta^2 \nu_1 \nu_1'} \right\} e^{i\zeta x} d\zeta \\
& + \int_0^{k_\alpha} \left\{ \frac{\gamma(2\gamma^2 - k_\beta^2 + 2\nu_1 \nu_1')}{(2\gamma^2 - k_\beta^2)^2 + 4\gamma^2 \nu_1 \nu_1'} - \frac{\gamma(2\gamma^2 - k_\beta^2 - 2\nu_1 \nu_1')}{(2\gamma^2 - k_\beta^2)^2 - 4\gamma^2 \nu_1 \nu_1'} \right\} e^{i\gamma x} d\gamma \\
& + \int_{k_\alpha}^{k_\beta} \left\{ \frac{\gamma(2\gamma^2 - k_\beta^2 - 2\nu\nu_1')}{(2\gamma^2 - k_\beta^2)^2 - 4\gamma^2 \nu\nu_1'} - \frac{\gamma(2\gamma^2 - k_\beta^2 - 2\nu\nu_2')}{(2\gamma^2 - k_\beta^2)^2 - 4\gamma^2 \nu\nu_2'} \right\} e^{i\gamma x} d\gamma \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Integrál (3.36) může být též zapsán ve tvaru

$$\begin{aligned}
\int_{L_\beta} = & \int_{-i\infty}^0 \left\{ \frac{\zeta(2\zeta^2 - k_\beta^2 + 2\nu_1 \nu_1')}{(2\zeta^2 - k_\beta^2)^2 + 4\zeta^2 \nu_1 \nu_1'} - \frac{\zeta(2\zeta^2 - k_\beta^2 - 2\nu_1 \nu_1')}{(2\zeta^2 - k_\beta^2)^2 - 4\zeta^2 \nu_1 \nu_1'} \right\} e^{i\zeta x} d\zeta \\
& + \int_0^{k_\beta} \left\{ \frac{\gamma(2\gamma^2 - k_\beta^2 - 2\tilde{\nu}\nu_1')}{(2\gamma^2 - k_\beta^2)^2 - 4\gamma^2 \tilde{\nu}\nu_1'} - \frac{\gamma(2\gamma^2 - k_\beta^2 - 2\tilde{\nu}\nu_2')}{(2\gamma^2 - k_\beta^2)^2 - 4\gamma^2 \tilde{\nu}\nu_2'} \right\} e^{i\gamma x} d\gamma \quad (3.36')
\end{aligned}$$

Na horním svahu smyčky L_β , která je na straně dolního svahu L_α , máme $\tilde{\nu} = -\nu = \nu_2 = \text{Im}(\nu) < 0$ od 0 do k_α a $\tilde{\nu} = \nu = \text{Re}(\nu)$ od k_α do k_β . Obr. 3.7 také znázorňuje, že na dolním svahu L_β od 0 do k_β má druhá odmocnina ν' hodnotu $\nu_2' = -\nu_1' = \text{Im}(\nu') < 0$.

V prvním integrálu (3.35) je $\zeta = -i\tau$, můžeme ho tedy psát ve tvaru

$$-4k_\beta^2 \int_0^\infty \frac{\tau (2\tau^2 + k_\beta^2) \nu_1 \nu_1'}{(2\tau^2 + k_\beta^2)^4 - 16\tau^4 \nu_1^2 \nu_1'^2} e^{-\tau x} d\tau \quad (3.37)$$

Jestliže ve druhém integrálu (3.35) provedeme substituci $u = k_\alpha - \gamma$, dostaneme

$$4k_\beta^2 \exp(ik_\alpha x) \int_0^{k_\alpha} u^{1/2} G(u) e^{iux} du, \quad (3.38)$$

kde

$$G(u) = u^{-1/2} \frac{[2(k_\alpha - u)^2 - k_\beta^2] \nu_1 \nu_1'(k_\alpha - u)}{[2(k_\alpha - u)^2 - k_\beta^2]^4 - 16(k_\alpha - u)^4 \nu_1^2 \nu_1'^2} \quad (3.39)$$

Je zřejmé, že při velkých vzdálenostech x je integrál (3.37) malý z důvodu činitele $\tau e^{-\tau x}$ a že integrál (3.38) je malý z důvodu velice rychlých změn exponenciálního členu. Abychom získali jejich přibližné hodnoty, použijeme vzorce

$$\int_0^\infty \tau^{1/2} G(\tau) e^{-\tau x} d\tau = \quad (3.40)$$

$$\frac{\Gamma(3/2)}{x^{3/2}} G(0) + \frac{\Gamma(5/2)}{x^{5/2}} \frac{G'(0)}{1!} + \frac{\Gamma(7/2)}{x^{7/2}} \frac{G''(0)}{2!} + \dots$$

1 Vzorec (3.40) může být odvozen následovně: Nejprve si všimněme, že hlavní příspěvek k tomuto integrálu je způsoben menšími hodnotami proměnné τ , protože pro $x \neq 0$ integrand klesá rychle pro $\tau x \gg 1$ (exponenciální činitel). Substituuje-li tedy rozvoj $G(\tau)$ v okolí 0 (Maclaurinův vzorec)

$$G(\tau) = G(0) + \tau G'(0) + \frac{\tau^2}{1.2} G''(0) + \dots$$

do integrálu v (3.40), dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tau^{1/2} G(\tau) e^{-\tau x} d\tau &= G(0) \int_0^\infty e^{-\tau x} \tau^{3/2-1} d\tau + \\ &+ G'(0) \int_0^\infty e^{-\tau x} \tau^{5/2-1} d\tau + \frac{G''(0)}{1.2} \int_0^\infty e^{-\tau x} \tau^{7/2-1} d\tau + \dots \end{aligned}$$

Porovnáním s integrální definicí gama funkce v [REK81] na str.486

$$\frac{\Gamma(\sigma)}{x^\sigma} = \int_0^\infty e^{-\tau x} \tau^{\sigma-1} d\tau$$

je vzorec (3.40) ověřen.

V případě integrálu (3.37) je $G(0)=0$ a příspěvek tohoto integrálu klesá jako $x^{-5/2}$. Avšak integrál (3.38) obsahuje člen $x^{-3/2}$. Abychom to ukázali, poznamenejme, že pro velké x se převládající příspěvek k integrálu (3.38) objeví v blízkosti dolní meze (z důvodu rychlých změn posledního členu).

Proto můžeme se zanedbatelnou chybou rozšířit horní mez až k nekonečnu a zakřivit integrační cestu k imaginární ose. Potom můžeme aplikovat vzorec (3.40), poznamenejme, že

$$\nu_1 = \sqrt{(k_\alpha - u)^2 - k_\alpha^2} = \sqrt{-2k_\alpha u + u^2} \cong \sqrt{-2k_\alpha u}$$

pro $u \ll k_\alpha$, a

$$G(0) = \frac{(k_\alpha^2 - k_\beta^2)^{1/2} (-2)^{1/2} (k_\alpha)^{3/2}}{(2k_\alpha^2 - k_\beta^2)^3} \quad (3.41)$$

Tedy získáme

$$\int_{L_\alpha} = C(k_\alpha x)^{-3/2} \exp(-ik_\alpha x) + O(x^{-5/2}) \quad (3.42)$$

kde

$$C = -2\sqrt{2\pi} \frac{k_\alpha^3 k_\beta^2 (k_\beta^2 - k_\alpha^2)^{1/2}}{(k_\beta^2 - 2k_\alpha^2)^3} e^{-i\pi/4} \quad (3.43)$$

Podobným způsobem získáme i přibližnou hodnotu druhého integrálu podél řezu (3.36')

$$\int_{L_\beta} = D(k_\beta x)^{-3/2} \exp(-ik_\beta x) + O(x^{-5/2}) \quad (3.44)$$

kde D závisí na k_α a k_β , ale ne na vzdálenosti x .

Zahrneme-li integrály podél řezů do prvního výrazu v (3.29), dostaneme

$$u_0 = -\frac{Q}{\mu} \exp[i(\omega t - \kappa x)] + \frac{iQ}{2\pi\mu} \left\{ C(k_\alpha x)^{-3/2} \exp[i(\omega t - k_\alpha x)] + D(k_\beta x)^{-3/2} \exp[i(\omega t - k_\beta x)] \right\} + \dots \quad (3.45)$$

Obdobnou procedurou získáme pro druhý výraz v (3.29)

$$w_0 = -\frac{iQK}{\mu} \exp[i(\omega t - kx)] - \frac{Q}{2\pi\mu} \left(C_1 (k_\alpha x)^{-3/2} \exp[i(\omega t - k_\alpha x)] + D_1 (k_\beta x)^{-3/2} \exp[i(\omega t - k_\beta x)] \right) + \dots \quad (3.46)$$

kde C_1 a D_1 jsou určeny pro funkci Ψ v (3.17) a nezávisí na vzdálenosti x .

$$\begin{aligned} D &= -2i\sqrt{2\pi} \sqrt{1 - k_\alpha^2/k_\beta^2} e^{-i\pi/4} \\ C_1 &= -i\sqrt{2\pi} \frac{k_\alpha^2 k_\beta^2}{(k_\beta^2 - 2k_\alpha^2)^2} e^{-i\pi/4} \\ D_1 &= -4i\sqrt{2\pi} \left(1 - k_\alpha^2/k_\beta^2 \right) e^{-i\pi/4} \end{aligned} \quad (3.47)$$

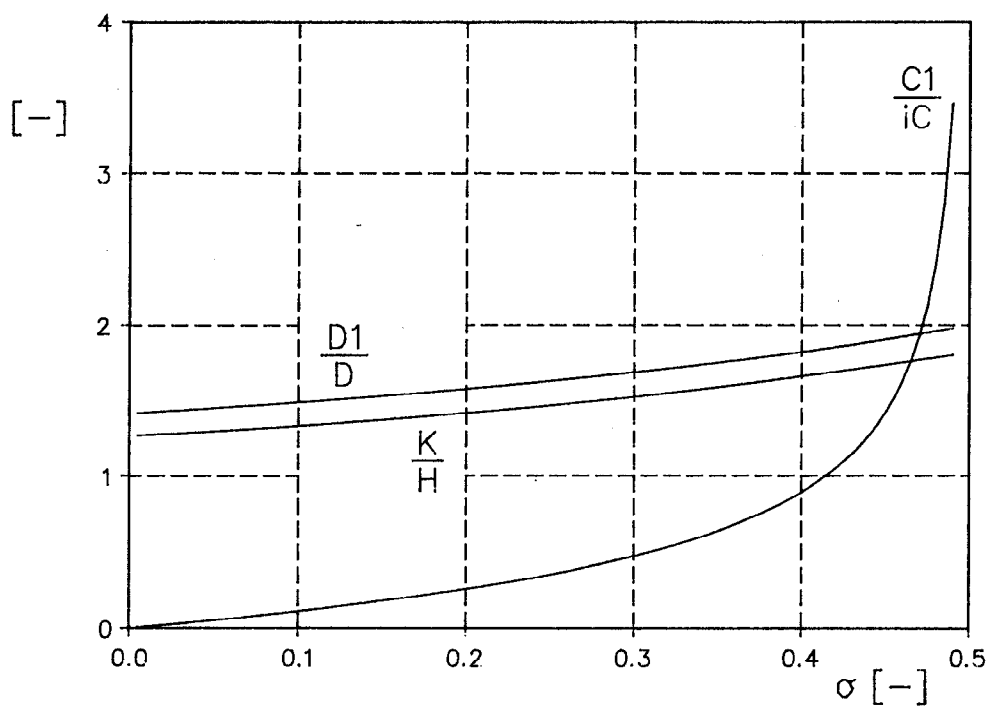
Podle vzorce (3.40) klesají další členy jako $x^{-5/2}$. Druhé členy v (3.45) a (3.46) představují podélné vlny šířící se rychlostí $\alpha = \omega/k_\alpha$ a třetí členy představují příčné vlny šířící se rychlostí $\beta = \omega/k_\beta$. Amplitudy jsou úměrné $(k_\alpha x)^{-3/2}$ resp. $(k_\beta x)^{3/2}$, kdežto v neomezeném prostředí klesají amplitudy jako $x^{-1/2}$. Povrchové vibrace odpovídající těmto vlnám jsou přímkové. Lamb [LAM04] uvedl poměr vertikální a horizontální amplitudy dilatačních vln

$$(k_\beta^2 - 2k_\alpha^2)/2k_\alpha^2 \sqrt{k_\beta^2 - k_\alpha^2}$$

Pro příčné vlny je tento poměr

$$2 \sqrt{1 - k_\alpha^2/k_\beta^2}$$

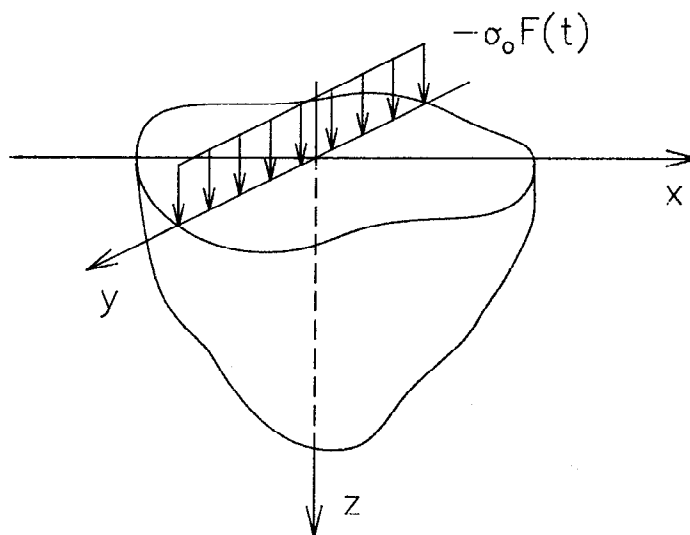
Průběhy K/H , C_1/iC a D_1/D v závislosti na Poissonově čísle jsou zobrazeny na obr. 3.8.



Obr. 1.8

IV. ŘEŠENÍ POMOCÍ INTEGRÁLNÍCH TRANSFORMACÍ

Problém je zachycen na obr. 4.1. Rovnoměrné kolmé přímkové zatížení, $-\sigma_0 F(t)$, začne v čase $t=0$ náhle působit na povrch elastického poloprostoru ($z=0$). Funkce $F(t)$ reprezentuje časové chování zatížení a σ_0 je kladná konstanta s rozměrem síly na jednotku délky.



Obr. 4.1

Naším cílem je odvodit a analyzovat vlnový systém v poloprostoru (nebo rovině), $-\infty < x < \infty$ a $z \geq 0$, který se šíří od zdroje pro $t > 0$. Rovnoměrnost zatížení vzhledem k y činí z tohoto problému problém rovinného přetvoření ($v=0$, $\partial/\partial y=0$), proto můžeme tuto úlohu definovat následovně

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi(x, z, t) &= \ddot{\varphi} / \alpha^2 \\ \nabla^2 \psi(x, z, t) &= \ddot{\psi} / \beta^2 \end{aligned} \right\} \text{ pro } -\infty < x < \infty, z > 0, t > 0, \quad (4.1)$$

-počáteční podmínky:

$$\varphi(x, z, 0) = \dot{\varphi} = \psi = \dot{\psi} = 0, \text{ pro } -\infty < x < \infty, z \geq 0, \quad (4.2)$$

-okrajové podmínky:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz}(x, 0, t) &= -\sigma_0 \delta_s(x) F(t) \\ \sigma_{zx}(x, 0, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pro } -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (4.3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\varphi(x, z, t), \psi, \partial\varphi/\partial x, \text{atd.}] = 0, \text{ pro } t > 0, \quad (4.4)$$

kde $r = (x^2 + z^2)^{1/2}$ a $\delta_s(x)$ je symetrická delta funkce², která je definována jako

$$\delta_s(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq -\epsilon \\ 1/2\epsilon & ; -\epsilon < x < \epsilon \\ 0 & ; x \geq \epsilon \end{cases} \quad (4.5a)$$

kde $\epsilon \rightarrow 0$ a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_s(x) dx = 1. \quad (4.5b)$$

Po Laplaceově transformaci rovnic (4.1) dostaneme

²Asymetrická delta funkce $\delta_A(x)$ je definována

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1/\epsilon & ; 0 < x < \epsilon \\ 0 & ; x > \epsilon \end{cases}$$

kde $\epsilon \rightarrow 0$ a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_A(x) dx = 1.$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}(x, z, p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}(x, z, p)}{\partial z^2} = \frac{p^2}{\alpha^2} \bar{\varphi}(x, z, p) - p\varphi(x, z, 0+) - \dot{\varphi}(x, z, 0+)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}(x, z, p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}(x, z, p)}{\partial z^2} = \frac{p^2}{\beta^2} \bar{\psi}(x, z, p) - p\psi(x, z, 0+) - \dot{\psi}(x, z, 0+)$$

Vzhledem k počátečním podmínkám (4.2) jsou poslední dva členy na pravých stranách těchto rovnic nulové. Provedeme-li nyní Fourierovu transformaci (pro reálný argument κ), obdržíme

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}(\kappa, z, p)}{d z^2} - (k_\alpha^2 + \kappa^2) \tilde{\varphi} = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}(\kappa, z, p)}{d z^2} - (k_\beta^2 + \kappa^2) \tilde{\psi} = 0,$$

kde $k_\alpha = p/\alpha$ a $k_\beta = p/\beta$. Řešení rovnic (4.6) jsou tvaru

$$\tilde{\varphi} = A(\kappa, p) \exp(-\eta_\alpha z) + C(\kappa, p) \exp(\eta_\alpha z), \quad (4.7)$$

$$\tilde{\psi} = B(\kappa, p) \exp(-\eta_\beta z) + D(\kappa, p) \exp(\eta_\beta z),$$

kde $\eta_\alpha = (k_\alpha^2 + \kappa^2)^{1/2}$ a $\eta_\beta = (k_\beta^2 + \kappa^2)^{1/2}$. Vztahy (4.7) musí splňovat dvakrát transformované podmínky (4.4). Proto, jelikož κ je reálné a uvažujeme p reálné kladné³, můžeme určit reálné kladné větve η_α a η_β a položit C a D rovno nule. Tím se nám vztahy (4.7) zredukují na

$$\tilde{\varphi}(\kappa, z, p) = A(\kappa, p) \exp(-\eta_\alpha z), \quad (4.8)$$

$$\tilde{\psi}(\kappa, z, p) = B(\kappa, p) \exp(-\eta_\beta z).$$

Vztahy mezi výchylkami a potenciály a mezi napětími a potenciály jsou [MIK78]

³Takto uvažované hodnoty p vedou podle Lerchova teorému k jednoznačné zpětné transformaci.

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad ; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\sigma_{zx} = \mu \left[\ddot{\psi}/\beta^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \right]$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \ddot{\varphi}/\alpha^2 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right)$$

Dvakrát transformované σ_{zz} a σ_{zx} jsou

$$\tilde{\sigma}_{zx}(\kappa, z, p) = \mu \left[k_{\beta}^2 \tilde{\psi}(\kappa, z, p) - 2 \left(i\kappa \frac{d\tilde{\varphi}}{dz} + \frac{d^2 \tilde{\psi}}{dz^2} \right) \right], \quad (4.9)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}(\kappa, z, p) = \lambda k_{\alpha}^2 \tilde{\varphi}(\kappa, z, p) + 2\mu \left[\frac{d^2 \tilde{\varphi}}{dz^2} - i\kappa \frac{d\tilde{\psi}}{dz} \right].$$

Po substituci vztahů (4.8) do (4.9) a následné substituci do dvakrát transformovaných okrajových podmínek (4.3)⁴ dostaneme dvě algebraické rovnice pro $A(\kappa, p)$ a $B(\kappa, p)$

$$\begin{aligned} (\lambda k_{\alpha}^2 + 2\mu \eta_{\alpha}^2) A + i2\mu \kappa \eta_{\beta} B &= -\sigma_0 F(\bar{p}), \\ i2\mu \kappa \eta_{\alpha} A + (k_{\beta}^2 - 2\eta_{\beta}^2) B &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

Řešením soustavy rovnic (4.10) je

$$\begin{aligned} A(\kappa, p) &= M (k_{\beta}^2 + 2\kappa^2), \\ B(\kappa, p) &= M (i2\mu \eta_{\alpha}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

kde $M = -\sigma_0 \bar{F}(p) / \mu R$, přičemž $R(\kappa, p) = (k_{\beta}^2 + 2\kappa^2)^2 - 4\kappa^2 \eta_{\alpha} \eta_{\beta}$ je Rayleighova funkce. Substitucí vztahů (4.11) do (4.8) dokončíme definování transformovaného řešení pro potenciály. Po provedení dvojné transformace vztahů mezi výchylkami a potenciály a substitucí za potenciály nalezneme transfor-

4

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, 0, t) &= -\sigma_0 \delta_s(x) F(t) \\ \bar{\sigma}_{zz}(x, 0, p) &= -\sigma_0 \delta_s(x) \bar{F}(p) \\ \tilde{\sigma}_{zz}(\kappa, 0, p) &= -\sigma_0 \tilde{\delta}_s(\kappa) \bar{F}(p) = -\sigma_0 \bar{F}(p) \quad [\tilde{\delta}_s(\kappa) = 1] \\ \tilde{\sigma}_{zx}(\kappa, 0, p) &= 0 \end{aligned}$$

movaná řešení pro výchylky

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\kappa, z, p) &= -i\kappa A \exp(-\eta_\alpha z) + \eta_\beta B \exp(-\eta_\beta z), \\ \tilde{w}(\kappa, z, p) &= -\eta_\alpha A \exp(-\eta_\alpha z) + i\kappa B \exp(-\eta_\beta z).\end{aligned}\tag{4.12}$$

Za podmínek stanovených pro η_α a η_β po uvedení vztahů (4.7) je vidět, že \tilde{u} a \tilde{w} , jako Fourierovy transformace s konstantním p a z , jsou spojité funkce κ pro $-\infty < \kappa < \infty$ za předpokladu, že $R(\kappa, p)$ z (4.11) nemá v této oblasti nulové body. Lze ukázat, že $R(\kappa, p)$ má pár jednoduchých nulových bodů, které odpovídají Rayleighově povrchové vlně. Pokud $z \geq 0$, není obtížné dokázat, že

$$\lim_{\kappa \rightarrow \pm\infty} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} = 0.$$

Tyto vlastnosti poukazují, že \tilde{u} a \tilde{w} jsou "slušně se chovající" Fourierovy transformace. Proto můžeme formálně napsat zpětnou Fourierovu transformaci vztahů (4.12)

$$\begin{bmatrix} \bar{u}(\kappa, z, p) \\ \bar{w}(\kappa, z, p) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \tilde{u}(\kappa, z, p) \\ \tilde{w}(\kappa, z, p) \end{bmatrix} \exp(-i\kappa x) dx \tag{4.13}$$

Inverze Laplaceových transformací \bar{u} a \bar{w} v (4.13) může být provedena důmyslnou metodou, která byla poprvé popsána Cagniardem⁵[CAG39]. Budeme používat modifikovanou verzi, kterou vypracoval deHoop [H0056] a která je jednodušší. Podstatou metody je řadou transformací a křivkovými integracemi převést integrály ve vztazích (4.13) na tvar Laplaceových integrálních operátorů⁶ a potom takto vytvořené integrální rovnice pro \underline{u} a \underline{w} řešit prohlídkou ("by inspection"). Poněvadž je p reálné a kladné, začneme zavede-

⁵Poznamenejme, že na tento problém a problémy podobné není integrál zpětné Laplaceovy transformace příliš vhodný, poněvadž zde máme co činit s dvojným zpětným integrálem obsahujícím v rovině p body rozvětvení η_α a η_β .

⁶ $\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$

ním reálné proměnné $\zeta = x/k_\alpha$ do integrálů ve vztazích (4.13), tedy s

$$\begin{aligned}x &= k_\alpha \zeta, & dx &= k_\alpha d\zeta, \\ \eta_\alpha &= k_\alpha (\zeta^2 + 1)^{1/2}, & \eta_\beta &= k_\alpha (\zeta^2 + k^2)^{1/2}, \\ k^2 &= \alpha^2 / \beta^2,\end{aligned}$$

dostáváme integrály ve tvaru

$$\bar{u}(x, z, p) = \frac{\sigma_0 \bar{F}(p)}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [f_\alpha(\zeta) \exp[-pg_\alpha(\zeta)] + f_\beta(\zeta) \exp[-pg_\beta(\zeta)]] d\zeta \quad (4.15)$$

$$\bar{w}(x, z, p) = \frac{\sigma_0 \bar{F}(p)}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [h_\alpha(\zeta) \exp[-pg_\alpha(\zeta)] + h_\beta(\zeta) \exp[-pg_\beta(\zeta)]] d\zeta$$

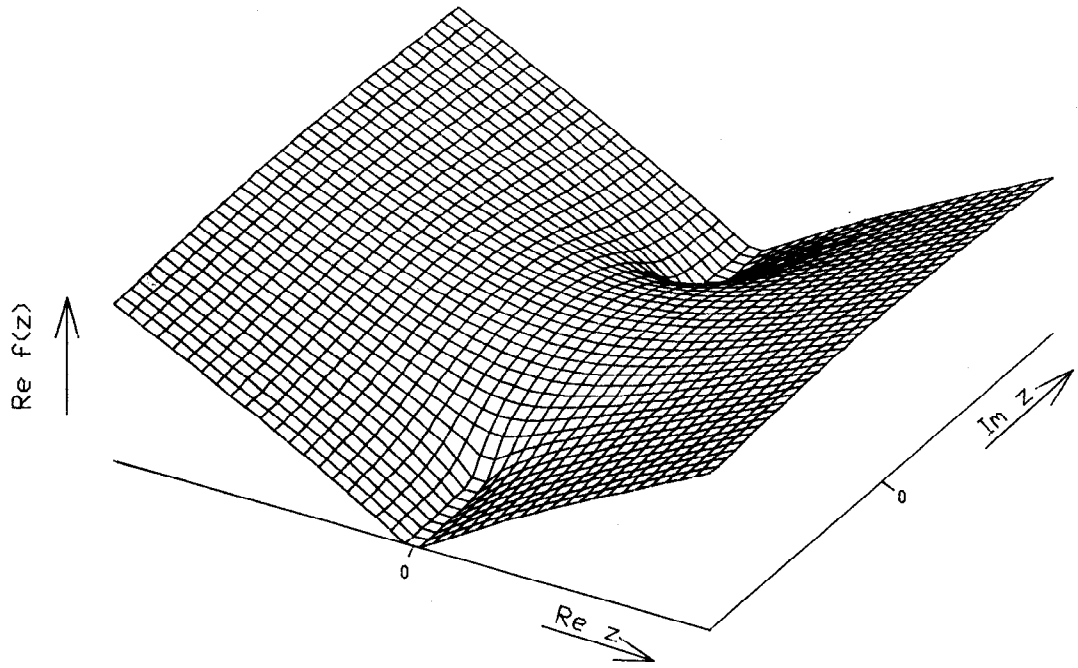
kde

$$\begin{aligned}g_\alpha(\zeta) &= (1/\alpha)[\eta'_\alpha(\zeta)z + i\zeta x], & g_\beta(\zeta) &= (1/\alpha)[\eta'_\beta(\zeta)z + i\zeta x], \\ f_\alpha(\zeta) &= i\zeta(k^2 + 2\zeta^2)/R(\zeta), & f_\beta(\zeta) &= -i2\zeta[\eta'_\alpha(\zeta)\eta'_\beta(\zeta)]/R(\zeta), \\ h_\alpha(\zeta) &= \eta'_\alpha(\zeta)(k^2 + 2\zeta^2)/R(\zeta), & h_\beta(\zeta) &= -2\zeta^2\eta'_\alpha(\zeta)/R(\zeta) \\ a \quad R(\zeta) &= (k^2 + 2\zeta^2)^2 - 4\zeta^2\eta'_\alpha(\zeta)\eta'_\beta(\zeta),\end{aligned}$$

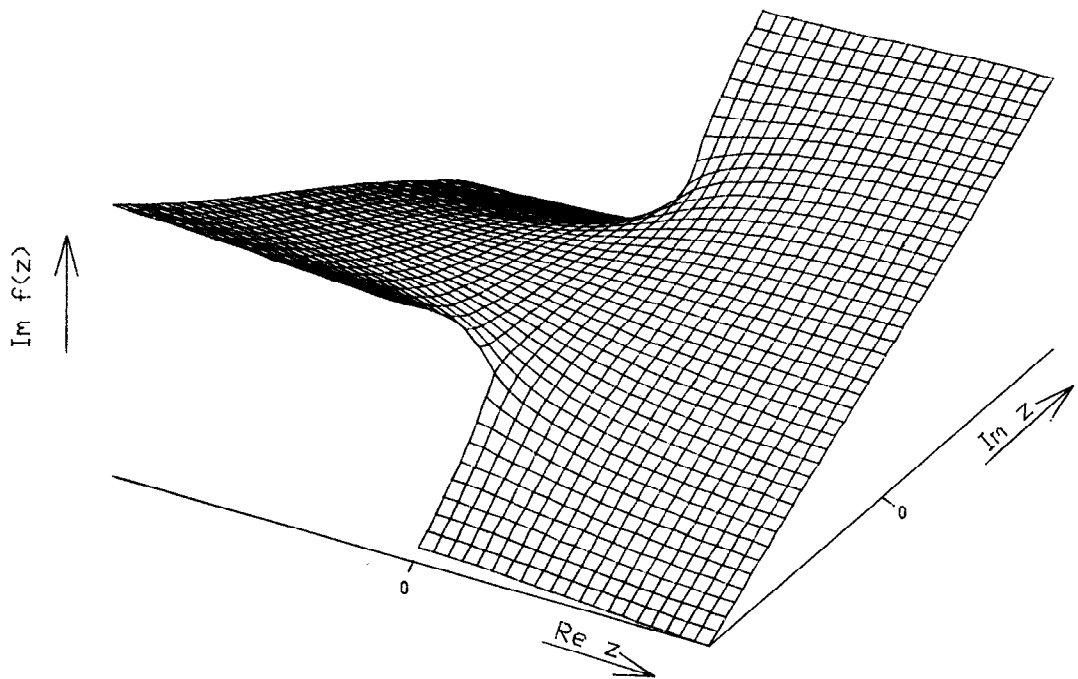
kde členy v integrálu (4.15) s indexem α resp. β odpovídají dilatační resp. příčné části výchylek a $\eta'_\alpha(\zeta) = \eta_\alpha(\zeta)/k_\alpha = (\zeta^2 + 1)^{1/2}$ a $\eta'_\beta(\zeta) = \eta_\beta(\zeta)/k_\alpha = (\zeta^2 + k^2)^{1/2}$. Pro lepší názornost je na obr. 4.2a resp. obr. 4.2b zobrazena reálná resp. imaginární část funkce $f(z) = (z^2 + k^2)^{1/2}$, která představuje funkce typu $\eta'_\alpha(\zeta)$ a $\eta'_\beta(\zeta)$. Z obrázků je patrná nutnost zavedení řezů na imaginární ose.

Cagniard-deHoopova metoda inverze integrálů, jaké jsou uvedeny ve vztazích (4.15), je založena na následující elementární vlastnosti jednostranné Laplaceovy transformace

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_{t_1}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right\} = f(t) H(t - t_1) \quad .$$



Obr. 4.2a



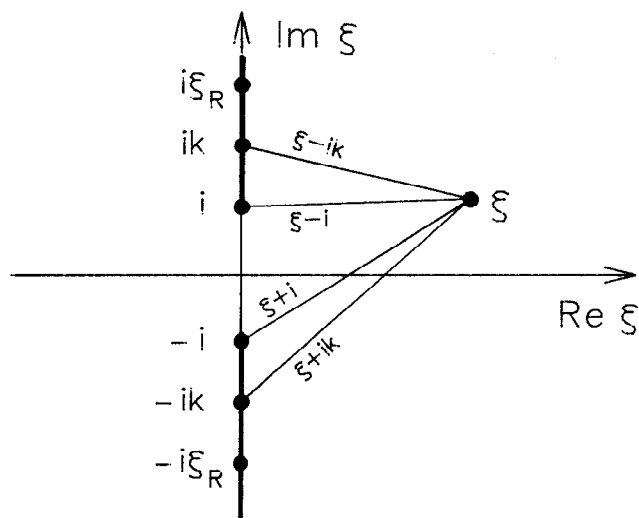
Obr. 4.2b

Základní ideou Cagniard-deHoopovy metody je zavedení substituce $g(\zeta)=t$, které je reálné a kladné. Tento zákrok deformuje integrační cestu, takže se odchýlí od reálné osy ζ . Samozřejmě potom musí být brán v úvahu charakter \underline{f} , \underline{g} a \underline{h} , vyskytujících se v (4.15), v komplexní rovině ζ . Funkce \underline{f} a \underline{h} mají body rozvětvení v $\zeta=\pm i, \pm ik$ a jednoduché póly $\zeta=\pm ik/k_{\mathbf{R}}=\zeta_{\mathbf{R}}$ (nuly $R(\zeta)$ pro Rayleighovu povrchovou vlnu). ($k_{\mathbf{R}}=c_{\mathbf{R}}/\beta$; $\zeta_{\mathbf{R}}=\alpha/c_{\mathbf{R}}$) Funkce \underline{g} má body rozvětvení v $\zeta=\pm i$ a $\zeta=\pm ik$. Komplexní rovina ζ může být rozříznuta, jak je uvedeno na obr. 4.3, a jednoduché víceznačné funkce $\eta'_{\alpha}(\zeta)$, $\eta'_{\beta}(\zeta)$ mohou být analyticky prodlouženy mimo reálnou osu, kde jsou reálné a kladné (jak jsme určili již dříve u η_{α} a η_{β}). Jestliže necháme

$$\zeta - i = \varrho_1 \exp(i\varphi_1), \quad -3\pi/2 < \varphi_1 < \pi/2, \quad \varrho_1 > 0,$$

$$\zeta + i = \varrho_2 \exp(i\varphi_2), \quad -\pi/2 < \varphi_2 < 3\pi/2, \quad \varrho_2 > 0,$$

dá se snadno ukázat, že v řezu dolní poloroviny platí $-\pi/2 < \arg \eta'_{\alpha}(\zeta) < \pi/2$.



Obr. 4.3

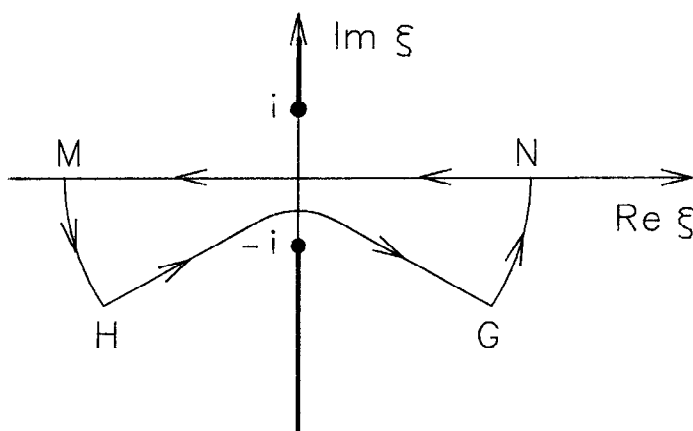
Podobný rozbor ukáže to samé pro $\eta'_{\beta}(\zeta)$. Z toho vyplývá, že

$$\operatorname{Re} \begin{bmatrix} \eta'_{\alpha}(\zeta) \\ \eta'_{\beta}(\zeta) \end{bmatrix} \geq 0,$$

všude v řezu dolní poloroviny a $\text{Re}|\rightarrow\infty$, když $|\zeta|\rightarrow\infty$. Dále v dolní polorovině, $\text{Im}(\zeta)<0$. Na základě tohoto rozboru; jestliže budeme integrovat integrály ve vztazích (4.15) přes celou cestu znázorněnou na obr. 4.4⁷, předpokládáme, $z\geq 0$ a $x>0$, dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{\mathbf{N}}^{\mathbf{M}} = -\int_{\mathbf{N}}^{\mathbf{M}} = \int_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}},$$

neboť aplikací Jordanova lemma zmizí integrály po velkých kruhových drahách MH a GN. Proto jsou integrály v (4.15) (podél originální integrační cesty, tj. reálné osy) ekvivalentní k integrálům podél libovolné cesty v dolní polorovině; od nekonečna ve třetím kvadrantu do nekonečna ve čtvrtém kvadrantu procházející mezi $\zeta=0$ a $\zeta=-i$, jak je uvedeno na obr. 4.4.



Obr. 4.4

Zavedme nyní $g_{\alpha}(\zeta)=t$. Jak uvidíme, zavedeme tímto v dolní polorovině křivku typu ekvivalentní cesty z obr. 4.4. Ze vztahu (4.15) máme

$$t = (1/\alpha) [(\zeta^2+1)^{1/2} z + i\zeta x] . \quad (4.16)$$

⁷

$$\int_{\mathbf{N}}^{\mathbf{M}} + \int_{\mathbf{M}}^{\mathbf{H}} + \int_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}} + \int_{\mathbf{G}}^{\mathbf{N}} = 2\pi i \sum \text{Res} = 0$$

Řešením rovnice (4.16) vzhledem k ζ dostaneme

$$\zeta = \frac{-ix\alpha t \pm z[\alpha^2 t^2 - (x^2 + z^2)]^{1/2}}{x^2 + z^2}, \quad (4.17)$$

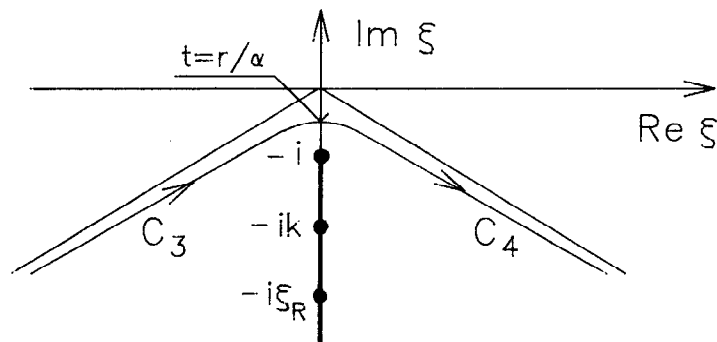
a zavedením polárních souřadnic $r=(x^2+z^2)^{1/2}$ a $\vartheta=\tan^{-1}(x/z)$, kde $0 \leq r < \infty$, $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$, ϑ se měří od osy z , dostaneme novou integrační cestu (4.17) ve tvaru

$$\zeta = \pm [(\alpha t/r)^2 - 1]^{1/2} \cos \vartheta - i(\alpha t/r) \sin \vartheta, \quad r/\alpha \leq t < \infty \quad (4.18)$$

s $[(\alpha t/r)^2 - 1]^{1/2} \geq 0$ a $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$, což je větev hyperboly

$$[\operatorname{Im}(\zeta)/\sin \vartheta]^2 - [\operatorname{Re}(\zeta)/\cos \vartheta]^2 = 1, \quad (4.19)$$

ležící v dolní polovině roviny ζ , jak to vyžaduje naše předchozí analýza, s asymptotami $\operatorname{Im}(\zeta)/\operatorname{Re}(\zeta) = \pm \tan \vartheta$. Poznamenejme, že omezením ϑ na pravou čtvrtinu roviny ζ nedojde k omezení samotného fyzikálního problému, neboť problém je symetrický vzhledem k ose z . Nejkratší čas v (4.18) je $t=r/\alpha$, pro který $\zeta = -i \sin \vartheta$, což je vrchol větve hyperboly. Jak t roste, reálné části (\pm) a záporná imaginární část rostou také. Jak $t \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im}(\zeta)/\operatorname{Re}(\zeta) \rightarrow \pm \tan \vartheta$, tj. (4.18) směřuje ke svým asymptotám. Na obr. 4.5 je uveden náčrtek této Cagniardovy cesty, která odpovídá dilatačním vlnám. Vidíme, že pokud $0 \leq \sin \vartheta < 1$ (neboli $0 \leq \vartheta < \pi/2$), Cagniardova cesta neprotíná řez uvedený na obr. 4.5.



Obr. 4.5

Pro ζ ve čtvrtém kvadrantu máme $-\bar{\zeta}$ (čárka nad ζ označuje komplexně sdruženou hodnotu) ve třetím kvadrantu roviny ζ . Proto, integrujeme-li g_α -integrály v (4.15) přes cestu

(4.18), na obr. 4.5 označenou jako C_3+C_4 , dostaneme

$$\int_{C_3} \begin{bmatrix} f_\alpha(\zeta) \\ h_\alpha(\zeta) \end{bmatrix} \exp[-pg_\alpha(\zeta)] d\zeta + \int_{C_4} \begin{bmatrix} f_\alpha(\zeta) \\ h_\alpha(\zeta) \end{bmatrix} \exp[-pg_\alpha(\zeta)] d\zeta = \quad (4.20)$$

$$\int_{-C_3} \begin{bmatrix} f_\alpha(-\bar{\zeta}) \\ h_\alpha(-\bar{\zeta}) \end{bmatrix} \exp[-pg_\alpha(-\bar{\zeta})] d\zeta + \int_{C_4} \begin{bmatrix} f_\alpha(\zeta) \\ h_\alpha(\zeta) \end{bmatrix} \exp[-pg_\alpha(\zeta)] d\zeta.$$

Poznamenejme, že

$$g_\alpha(-\bar{\zeta}) = (1/\alpha) [\overline{\eta'_\alpha(\zeta)} z - i\bar{\zeta}x] = \overline{g_\alpha(\zeta)},$$

$$f_\alpha(-\bar{\zeta}) = -i\zeta(k^2+2\bar{\zeta}^2)/R(-\bar{\zeta}) = \overline{f_\alpha(\zeta)},$$

$$h_\alpha(-\bar{\zeta}) = \overline{\eta'_\alpha(\zeta)}(k^2+2\bar{\zeta}^2)/R(-\bar{\zeta}) = \overline{h_\alpha(\zeta)},$$

kde $R(-\bar{\zeta}) = (k^2+2\bar{\zeta}^2)^2 - 4\bar{\zeta}^2\overline{\eta'_\alpha(\zeta)}\overline{\eta'_\beta(\zeta)}$, tj. funkce g_α , f_α a h_α ve třetím kvadrantu jsou komplexně sdružené s funkcemi ve čtvrtém kvadrantu. Využijeme-li tyto vztahy, můžeme psát integrály na pravé straně (4.20), které představují dilatační příspěvky k Laplaceovým transformacím výchylek, jako

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_\alpha(x, z, p) \\ \bar{w}_\alpha(x, z, p) \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_0 \bar{F}(p)}{\pi\mu} \int_{C_4} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} f_\alpha(\zeta) \\ h_\alpha(\zeta) \end{bmatrix} \exp[-pg_\alpha(\zeta)] \right\} d\zeta. \quad (4.22)$$

Nyní použijeme (4.18) pro ζ podél C_4 ; tj.

$$\zeta = \omega_\alpha(t) = [(\alpha t/r)^2 - 1]^{1/2} \cos\vartheta - i(\alpha t/r) \sin\vartheta, \quad r/\alpha \leq t < \infty \quad (4.23)$$

a zavedeme toto a $g_\alpha(\zeta)=t$ do (4.22), potom

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_\alpha(x, z, p) \\ \bar{w}_\alpha(x, z, p) \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_0 \bar{F}(p)}{\pi\mu} \int_{r/\alpha}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} f_\alpha(\omega_\alpha) \\ h_\alpha(\omega_\alpha) \end{bmatrix} \frac{d\omega_\alpha(t)}{dt} \right\} e^{-pt} dt. \quad (4.24)$$

Postup pro g_β -integrály v (4.15) je v podstatě stejný. Máme

$$t = g_\beta(\zeta) = (1/\alpha) [(\zeta^2+k^2)^{1/2} z + i\zeta x], \quad (4.25)$$

a proto nová integrační cesta je

$$\zeta = \pm [(\beta t/r)^2 - 1]^{1/2} k \cos \vartheta - i(\alpha t/r) \sin \vartheta, \quad r/\beta \leq t < \infty, \quad (4.26)$$

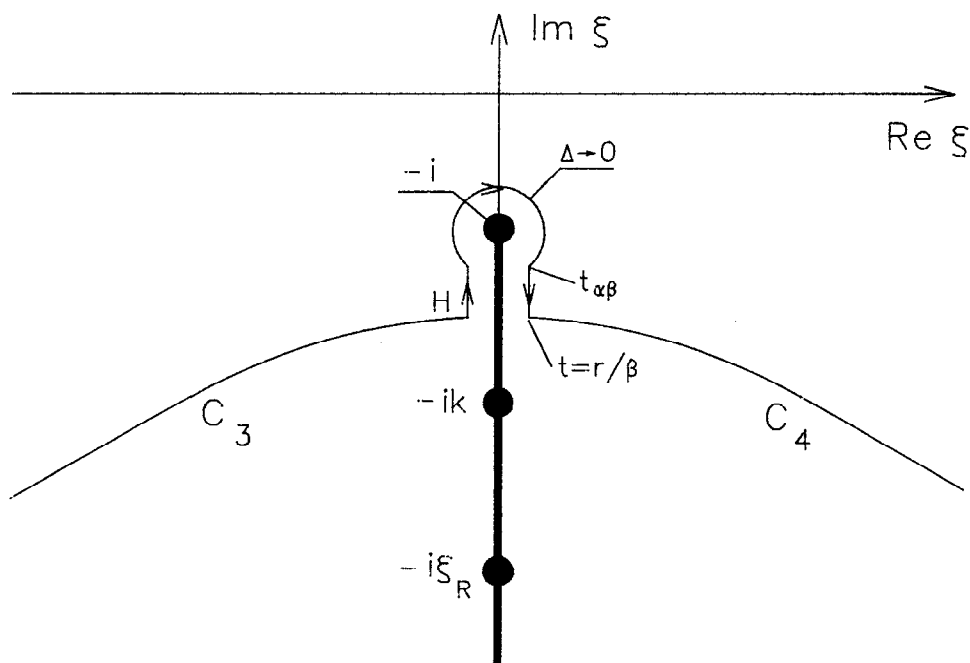
s $[(\beta t/r)^2 - 1]^{1/2} \geq 0$ a $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$. Rovnice (4.26) je opět větev hyperboly, podobně jako (4.19), ležící v dolní polovině roviny ζ s asymptotami $\text{Im}\{\zeta\}/\text{Re}\{\zeta\} = i \tan \vartheta$. Počáteční čas je nyní $t=r/\beta$, což dává $\zeta = -ik \sin \vartheta$ jako vrchol větve hyperboly. Platí-li $0 \leq k \sin \vartheta < 1$ (neboli $0 \leq \vartheta < \sin^{-1}(1/k) = \beta_{kr}$), (4.26) neprotíná řez a situace je stejná jako u g_α -integrálů. Cesta ve čtvrtém kvadrantu je dána

$$\zeta = \omega_\beta(t) = [(\beta t/r)^2 - 1]^{1/2} k \cos \vartheta - i(\alpha t/r) \sin \vartheta, \quad r/\beta \leq t < \infty \quad (4.27)$$

a příčný příspěvek k Laplaceovým transformacím výchylek pro případ ($0 \leq k \sin \vartheta < 1$) je následující

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_\beta(x, z, p) \\ \bar{w}_\beta(x, z, p) \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_0 \bar{F}(p)}{\pi \mu} \int_{r/\beta}^{\infty} \text{Re} \left\{ \begin{Bmatrix} f_\beta(\omega_\beta) \\ h_\beta(\omega_\beta) \end{Bmatrix} \frac{d\omega_\beta(t)}{dt} \right\} e^{-pt} dt. \quad (4.28)$$

Jestliže $1 < k \sin \vartheta < k$ (neboli $\sin^{-1}(1/k) \leq \vartheta \leq \pi/2$), bude Cagniardova cesta (4.27) protínat řez, takže tato cesta musí být doplněna drahou, nazvěme ji H , která těsně obchází tento řez a spojuje Cagniardovy cesty C_3 a C_4 (viz obr. 4.6).



Obr. 4.6

Přímkové úseky cesty H, podél řezu, se napojují na cesty C_3 a C_4 v bodě $\zeta = -ik \sin\vartheta$, což odpovídá času $t = r/\beta$ (viz obr. 4.6). Podél těchto drah se ζ stává limitně ryze imaginární záporné. Dále se $|\zeta|$ podél těchto drah zmenšuje od $\zeta = -ik \sin\vartheta$ k $\zeta = -i$. Z (4.27) plyne, že tyto cesty jsou popsány

$$\zeta = \omega_{\alpha\beta}(t) = i \left\{ [1 - (\beta t/r)^2]^{1/2} k \cos\vartheta - (\alpha t/r) \sin\vartheta \right\}, \quad (4.29)$$

pro $t \leq r/\beta$. Minimálního času $t_{\alpha\beta}$ je dosaženo v bodu rozvětvení $\zeta = i$, proto, substituujeme-li tento minimální čas do (4.25), dostaneme

$$t_{\alpha\beta} = (1/\alpha) [(k^2 - 1)^{1/2} z + x] = (r/\alpha) [\sin\vartheta + (k^2 - 1)^{1/2} \cos\vartheta]. \quad (4.30)$$

Pro odhad příspěvku kruhového úseku cesty H položíme $\zeta = -i + \Delta e^{i\delta}$. Z (4.15) dostaneme pro g_β -integrály po této cestě

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} i\Delta \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \begin{bmatrix} f_\beta(-i + \Delta e^{i\delta}) \\ h_\beta(-i + \Delta e^{i\delta}) \end{bmatrix} \exp[-pg_\beta(-i + \Delta e^{i\delta}) + i\delta] d\delta \quad (4.31)$$

Pro $\Delta \rightarrow 0$,

$$g_\beta(-i + \Delta e^{i\delta}) = (1/\alpha) [(k^2 - 1)^{1/2} z + x] = t_{\alpha\beta},$$

$$f_\beta(-i + \Delta e^{i\delta}) \cong -2(-2i\Delta e^{i\delta})^{1/2} (k^2 - 1)^{1/2} / (k^2 - 2)^2,$$

$$h_\beta(-i + \Delta e^{i\delta}) \cong 2(-2i\Delta e^{i\delta})^{1/2} / (k^2 - 2)^2, \quad a$$

proto hodnoty integrálů (4.31) klesají jako $\Delta^{3/2}$.

Při výpočtu příspěvku od přímkových úseků cesty H použijeme opět konjugačních vlastností funkcí f_β , g_β a h_β . Příčný příspěvek k Laplaceovým transformacím výchylek od cesty H je tedy

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_{\alpha\beta}(x, z, p) \\ \bar{w}_{\alpha\beta}(x, z, p) \end{array} \right\} = \frac{\sigma_0 \bar{F}(p)}{\pi\mu} \int_{t_{\alpha\beta}}^{r/\beta} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} f_\beta(\omega_{\alpha\beta}) \\ h_\beta(\omega_{\alpha\beta}) \end{bmatrix} \frac{d\omega_{\alpha\beta}(t)}{dt} \right\} e^{-pt} dt, \quad (4.32)$$

kde $\omega_{\alpha\beta}$ a $t_{\alpha\beta}$ jsou dány (4.29) resp. (4.30).

Abychom vyhodnotili integrály ve vztazích (4.24), (4.28) a (4.32), musíme napsat integrandy pouze v proměnné t .

To můžeme udělat, využijeme-li skutečnosti, že naše Cagniardovy integrační cesty jsou všechny ve čtvrtém kvadrantu roviny ζ , kde $\text{Re}\{\eta'_{\alpha,\beta}\} \geq 0$ a $\text{Im}\{\eta'_{\alpha,\beta}\} \leq 0$. Tedy z (4.16) a (4.23) plyne

$$\begin{aligned} \eta'_\alpha(\omega_\alpha) &= (\omega_\alpha^2 + 1)^{1/2} = (1/z)(\alpha t - i\omega_\alpha x) = \\ &= (\alpha t/r)\cos\vartheta - i\sqrt{(\alpha t/r)^2 - 1} \sin\vartheta. \end{aligned} \quad (4.33a)$$

Tedy

$$\eta'_\beta(\omega_\alpha) = (\omega_\alpha^2 + k^2)^{1/2}. \quad (4.33b)$$

Obdobně z (4.25) a (4.27) obdržíme

$$\eta'_\beta(\omega_\beta) = (\alpha t/r)\cos\vartheta - ik\sqrt{(\beta t/r)^2 - 1} \sin\vartheta. \quad (4.34a)$$

Tedy

$$\eta'_\alpha(\omega_\beta) = (\omega_\beta^2 + 1)^{1/2}. \quad (4.34b)$$

A z (4.25) a (4.29),

$$\eta'_\beta(\omega_{\alpha\beta}) = (\alpha t/r)\cos\vartheta + k\sqrt{1 - (\beta t/r)^2} \sin\vartheta. \quad (4.35a)$$

Tedy

$$\eta'_\alpha(\omega_{\alpha\beta}) = (\omega_{\alpha\beta}^2 + 1)^{1/2}. \quad (4.35b)$$

Výrazy $R(\omega_\alpha)$, $R(\omega_\beta)$ a $R(\omega_{\alpha\beta})$ se vyjádří z $R(\zeta)$ v (4.15) pomocí (4.23), (4.27), (4.29), (4.33), (4.34) a (4.35).

Protože v tomto problému mají dilatační a příčné vlnoplochy kruhově válcový charakter, je přirozené, že budeme hledat vyjádření odpovídajících složek výchylky u_r a u_ϑ , poněvadž směřují kolmo resp. tečně k těmto vlnoplochám. Laplaceovy transformace pro u_r a u_ϑ snadno odvodíme z (4.24), (4.28) a (4.32) za pomoci vztahů

$$\begin{aligned} u_r &= u \sin\varphi + w \cos\varphi, \\ u_\vartheta &= u \cos\varphi - w \sin\varphi, \end{aligned} \quad (4.36)$$

a (4.15), (4.23), (4.27), (4.29), (4.33a) a (4.35a). Výsledné výrazy jsou

$$\begin{aligned}
\bar{u}_r(r, \varphi, p) &= \bar{u}_{r\alpha} + \bar{u}_{r\beta} + \bar{u}_{r\alpha\beta} \\
&= \frac{\sigma_0 \bar{F}(p)}{\pi\mu} \left\{ \int_{r/\alpha}^{\infty} (\alpha t/r) \operatorname{Re} \left[\frac{(k^2 + 2\omega_\alpha^2)}{R(\omega_\alpha)} \frac{d\omega_\alpha}{dt} \right] e^{-pt} dt \right. \\
&\quad + \int_{r/\beta}^{\infty} k [(\beta t/r)^2 - 1]^{1/2} \operatorname{Re} \left[\frac{-2\omega_\beta \eta'_\alpha(\omega_\beta)}{R(\omega_\beta)} \frac{d\omega_\beta}{dt} \right] e^{-pt} dt \quad (4.37) \\
&\quad \left. + \int_{t_{\alpha\beta}}^{r/\beta} k [1 - (\beta t/r)^2]^{1/2} \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_{\alpha\beta} \eta'_\alpha(\omega_{\alpha\beta})}{R(\omega_{\alpha\beta})} \frac{d\omega_{\alpha\beta}}{dt} \right] e^{-pt} dt \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_\vartheta(r, \varphi, p) &= \bar{u}_{\vartheta\alpha} + \bar{u}_{\vartheta\beta} + \bar{u}_{\vartheta\alpha\beta} \\
&= \frac{\sigma_0 \bar{F}(p)}{\pi\mu} \left\{ \int_{r/\alpha}^{\infty} [(\alpha t/r)^2 - 1]^{1/2} \operatorname{Re} \left[\frac{i(k^2 + 2\omega_\alpha^2)}{R(\omega_\alpha)} \frac{d\omega_\alpha}{dt} \right] e^{-pt} dt \right. \\
&\quad + \int_{r/\beta}^{\infty} (\alpha t/r) \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_\beta \eta'_\alpha(\omega_\beta)}{R(\omega_\beta)} \frac{d\omega_\beta}{dt} \right] e^{-pt} dt \quad (4.38) \\
&\quad \left. + \int_{t_{\alpha\beta}}^{r/\beta} (\alpha t/r) \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_{\alpha\beta} \eta'_\alpha(\omega_{\alpha\beta})}{R(\omega_{\alpha\beta})} \frac{d\omega_{\alpha\beta}}{dt} \right] e^{-pt} dt \right\}.
\end{aligned}$$

Podle naší analýzy, vztahy (4.37) a (4.38) jsou platné v oblasti $0 < r < \infty$ a $0 \leq \vartheta < \pi/2$, třetí integrál se vyskytuje pouze v případě $\sin^{-1}(1/k) \leq \vartheta < \pi/2$. Z toho vyplývá, že (4.37) a (4.38) jsou transformovaná řešení vnitřku poloprostoru.

Pro řešení reprezentující povrchovou odezvu se musíme vrátit ke vztahu (4.15) a za pomoci (4.36) a substituce $\vartheta = \pi/2$, nalezneme

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(r, \pi/2, p) &= \bar{u}(r, \pi/2, p) \\ &= \frac{\sigma_0 \bar{F}(p)}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\zeta \left[(k^2 + 2\zeta^2) - 2\eta'_\alpha(\zeta)\eta'_\beta(\zeta) \right]}{R(\zeta)} e^{-i p r \zeta / \alpha} dt, \quad (4.39a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_\vartheta(r, \pi/2, p) &= -\bar{w}(r, \pi/2, p) \\ &= -\frac{\sigma_0 \bar{F}(p) k^2}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta'_\alpha(\zeta)}{R(\zeta)} e^{-i p r \zeta / \alpha} dt. \quad (4.39b) \end{aligned}$$

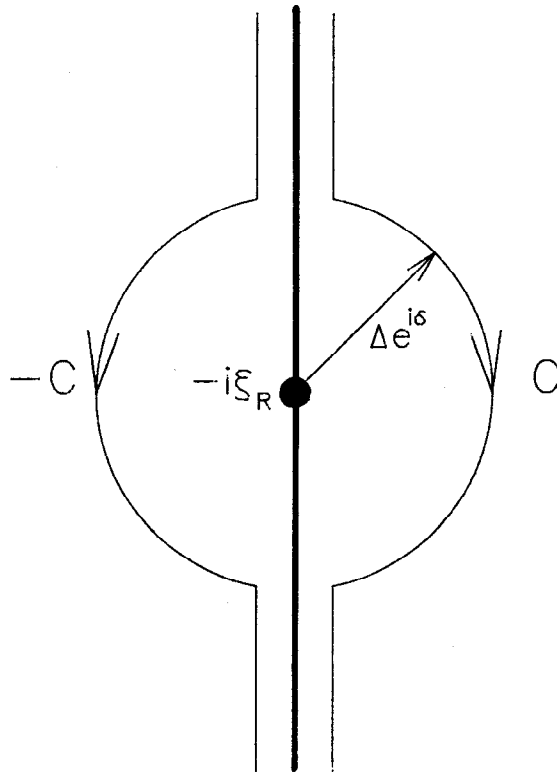
Po substituci $\vartheta = \pi/2$ do (4.23), (4.27) a (4.29) [integrační cesty $\omega_\alpha(t)$, $\omega_\beta(t)$ a $\omega_{\alpha\beta}(t)$], získáme $\zeta = -i\alpha t/r$ s $r/\alpha \leq t < \infty$ resp. $r/\beta \leq t < \infty$ resp. $t_{\alpha\beta} \leq t \leq r/\beta$. Z toho vyplývá, že případ povrchové odezvy má Cagniardovy cesty pro integrál dilatační a příčné vlny, které obepínají (těsně přiléhají k) řez uvedený na obr. 4.5. V případě integrálů dilatačních vln jsou kruhové cesty MH a NG pro $|\zeta| \rightarrow \infty$ čtvrtkružnice a C_3 jde k $\zeta = -i$ po levé straně řezu a C_4 se vrací po straně pravé. Podobné je to pro integrály příčných vln [včetně $g_{\alpha\beta}$ -integrálů]. Můžeme proto řešení u_r a u_ϑ na povrchu polo-prostoru vyjádřit jako součet příspěvku Rayleighova jednoduchého pólu v $\zeta = -i\zeta_R$ k těmto složkám výchylky a integrálů ve vztahu (4.37) resp. (4.38). V obou případech jsou první dva integrály brány ve smyslu Cauchyho hlavní hodnoty. Důvod, proč je třeba brát hlavní hodnoty integrálů, spočívá v Rayleighově singularitě, která se objevuje podél cest $\zeta = \omega_\alpha = \omega_\beta = -i\alpha t/r$ při $t = r/c_R$.

Vypočítat příspěvek Rayleighova pólu je jednoduché. Nechť $\zeta = -i\zeta_R + \Delta e^{i\delta}$, jak je uvedeno na obr. 4.7. Použijeme-li opět konjugačních vlastností našich funkcí, dostaneme

$$\bar{u}_{rR}(r, \pi/2, p) = \frac{\sigma_0 \bar{F}(p)}{\pi\mu} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_C \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{\text{integrand}}{v(39a)} \right] d\zeta \right\}, \quad (4.40)$$

který se redukuje na⁸

⁸ Blízko $\zeta = -i\zeta_R$, $R(\zeta) \cong \Delta e^{i\delta} R'(-i\zeta_R)$, přičemž $R' = dR/d\zeta$.



Obr. 4.7

$$\bar{u}_{rR}(r, \pi/2, p) = - \frac{\sigma_0 \bar{F}(p)}{\mu} \exp(-pr/c_R) A, \quad (4.41)$$

kde

$$A = \frac{[k^2 - 2\zeta_R^2 + 2\sqrt{\zeta_R^2 - 1} \sqrt{\zeta_R^2 - k^2}] \sqrt{\zeta_R^2 - 1} \sqrt{\zeta_R^2 - k^2}}{4 [k^2 (3\zeta_R^2 - 2) - \zeta_R^2 (4\zeta_R^2 - 3) - 2(k^2 - 2\zeta_R^2) \sqrt{\zeta_R^2 - 1} \sqrt{\zeta_R^2 - 1}]}$$

je reálná veličina. Poznamenejme, že čítec integrandu v (4.39a) je pro $\zeta \rightarrow -i\zeta_R$ reálný a odpovídající čítec v (4.39b) $\eta'_\infty(\zeta)$ je imaginární. Z toho lze vyvodit, že příspěvek od Rayleighova pólu je v tomto případě nulový, tj.

$$[\bar{u}_\vartheta(r, \pi/2, p)]_{R.P.} = 0. \quad (4.42)$$

Naše transformovaná řešení pro povrch poloprostoru, $\vartheta = \pi/2$, jsou proto následující

$$\bar{u}_r(r, \pi/2, p) = [\text{vztah (41)}] + \frac{\sigma_0 \bar{F}(p)}{\pi\mu} \left[\sum_v \text{integrály (37)} \right], \quad (4.43)$$

$$\bar{u}_\varphi(r, \pi/2, p) = \frac{\sigma_0 \bar{F}(p)}{\pi\mu} \left[\sum_v \text{integrály (38)} \right], \quad (4.44)$$

kde první dva integrály v každém případě jsou brány ve smyslu Cauchyho hlavní hodnoty.

Transformované "vnitřní" řešení (4.37) a (4.38) a "povrchové" řešení (4.43) a (4.44) jsou integrální rovnice pro neznámé inverze (obrazy) $u_r(r, \vartheta, t)$ a $u_\varphi(r, \vartheta, t)$. Jak poukázal deHoop, tyto integrální rovnice musí být splněny pro všechny reálné hodnoty p větší než nějaké konstantní kladné číslo. Potom řešení, inverze, těchto rovnic jsou jednoznačná (podle Lerchova teoremu). Připomeňme, že to bylo zabudováno do \bar{u}_r a \bar{u}_φ požadavkem reálného a kladného p a určením reálných kladných větví η_α a η_β v (4.8). Nyní zavedme $F(t) = \delta(t)$, takže $\bar{F}(p) = 1$; inspekci (4.37) a (4.38) dostaneme odpovídající vnitřní řešení

$$\begin{aligned} u_r^\delta(r, \varphi, t) = & \frac{\sigma_0}{\pi\mu} \left\{ (\alpha t/r) \operatorname{Re} \left[\frac{(k^2 + 2\omega_\alpha^2)}{R(\omega_\alpha)} \frac{d\omega_\alpha}{dt} \right] H(t-r/\alpha) \right. \\ & + k [(\beta t/r)^2 - 1]^{1/2} \operatorname{Re} \left[\frac{-2\omega_\beta \eta'_\alpha(\omega_\beta)}{R(\omega_\beta)} \frac{d\omega_\beta}{dt} \right] H(t-r/\beta) \\ & \left. + k [1 - (\beta t/r)^2]^{1/2} \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_{\alpha\beta} \eta'_\alpha(\omega_{\alpha\beta})}{R(\omega_{\alpha\beta})} \frac{d\omega_{\alpha\beta}}{dt} \right] [H(t-t_{\alpha\beta}) - H(t-r/\beta)] \right\}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}
u_{\vartheta}^{\delta}(r, \varphi, t) = & \frac{\sigma_0}{\pi\mu} \left\{ [(\alpha t/r)^2 - 1]^{1/2} \operatorname{Re} \left[\frac{i(k^2 + 2\omega_{\alpha}^2)}{R(\omega_{\alpha})} \frac{d\omega_{\alpha}}{dt} \right] H(t-r/\alpha) \right. \\
& + (\alpha t/r) \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_{\beta} \eta'_{\alpha}(\omega_{\beta})}{R(\omega_{\beta})} \frac{d\omega_{\beta}}{dt} \right] H(t-r/\beta) \\
& \left. + (\alpha t/r) \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_{\alpha\beta} \eta'_{\alpha}(\omega_{\alpha\beta})}{R(\omega_{\alpha\beta})} \frac{d\omega_{\alpha\beta}}{dt} \right] [H(t-t_{\alpha\beta}) - H(t-r/\beta)] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

kde index δ označuje odezvu na delta funkci a H je Heavisideova skoková funkce. Rovnice (4.45) a (4.46) jsou platné pro $0 < r < \infty$, $0 \leq \vartheta < \pi/2$, pouze třetí výrazy se objeví jen v oblasti $\beta_{kr} \leq \vartheta < \pi/2$. Průběhy radiálních, tangenciálních, horizontálních a vertikálních výchylek uvnitř poloprostoru při buzení Diracovou "funkcí" jsou zobrazeny na obr. 4.15, obr. 4.17, obr. 4.19 a obr. 4.21 pro několik hodnot úhlu ϑ .

Na povrchu, $\vartheta = \pi/2$, jsou inverze (4.43) a (4.44) následující

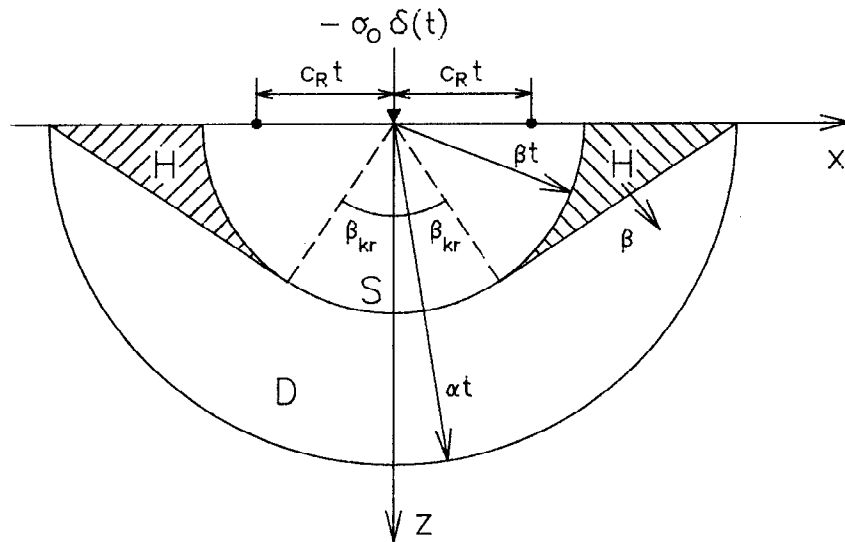
$$u_r^{\delta}(r, \pi/2, t) = \left[(45) \text{ pro } \vartheta = \pi/2 \right] - \frac{\sigma_0}{\mu} A \delta(t-r/c_R), \tag{4.47}$$

$$u_{\vartheta}^{\delta}(r, \pi/2, t) = \left[(46) \text{ pro } \vartheta = \pi/2 \right], \tag{4.48}$$

platné pro $0 < r < \infty$.

Řešení (4.45) až (4.48) Lambova problému povrchového kolmého přímkového zdroje s časovým průběhem δ -funkce prozrazují, že tento zdroj generuje čtyři různé typy vln, které určují charakter pohybu poloprostoru. Jedním z typů vln je cylindrická dilatační vlna, jejíž čelo se šíří ze zdroje ($r=0$) rychlostí α . Druhým typem je cylindrická příčná vlna, jejíž čelo se také šíří ze zdroje ($r=0$), ale rychlostí β . Třetím typem je von Schmidtova vlna ("head wave"). Rovinné vlnoplochy této vlny se objevují pouze v oblasti $\beta_{kr} \leq \vartheta \leq \pi/2$ a šíří se rychlostí β podél normály k vlnoploše, která svírá s osou z úhel β_{kr} . Posledním typem je singulární Rayleighova povrchová "vlna", která se šíří od zdroje rychlostí c_R . Tato "vlna" se objevuje též uvnitř poloprostoru, zde však již není singulární. Obr. 4.8

obsahuje náskres těchto vln pro libovolný konstantní čas t .



Obr. 4.8

Cylindrická dilatační vlna zahrnuje oblast D , definovanou $0 < r \leq \alpha t$. Podobně cylindrická příčná vlna zahrnuje oblast S , definovanou $0 < r \leq \beta t$. Von Schmidty vlny jsou vymezeny šrafovanou oblastí H , definovanou na pravé straně $\beta t \leq r \leq \alpha t / [\sin \vartheta + (k^2 - 1)^{1/2} \cos \vartheta]$ a $\beta_{kr} \leq \vartheta \leq \pi/2$ a na levé straně symetricky.

Vyhodnocení přesného řešení pro povrchovou odezvu:

Nyní vyhodnotíme povrchové řešení (4.47) a (4.48). Při $\vartheta = \pi/2$ dostaneme pro (4.23), (4.27), (4.29) a (4.30)

$$\begin{Bmatrix} \omega_{\alpha} \\ \omega_{\beta} \\ \omega_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = - \frac{i\alpha t}{r}, \quad \begin{cases} r/\alpha \leq t < \infty, \\ r/\beta \leq t < \infty, \\ t_{\alpha\beta} \leq t \leq r/\beta, \end{cases} \quad (4.49)$$

kde $t_{\alpha\beta} = r/\alpha$. Dále z (4.49) a (4.33), (4.34) a (4.35), bereme-li v úvahu skutečnost, že $\text{Re}(\eta'_{\alpha,\beta}) \geq 0$ a $\text{Im}(\eta'_{\alpha,\beta}) \leq 0$, vychází

$$\begin{aligned}
\eta'_\alpha(\omega_\alpha) &= -i[(\alpha t/r)^2 - 1]^{1/2}, & r/\alpha t < \infty, \\
\eta'_\beta(\omega_\alpha) &= \begin{cases} k[1 - (\beta t/r)^2]^{1/2}, & r/\alpha t < r/\beta, \\ -ik[(\beta t/r)^2 - 1]^{1/2}, & r/\beta t < \infty, \end{cases} \\
\eta'_\alpha(\omega_\beta) &= -i[(\alpha t/r)^2 - 1]^{1/2} \\
\eta'_\beta(\omega_\beta) &= -ik[(\beta t/r)^2 - 1]^{1/2} \end{cases}, & r/\beta t < \infty, \\
\eta'_\alpha(\omega_{\alpha\beta}) &= -i[(\alpha t/r)^2 - 1]^{1/2} \\
\eta'_\beta(\omega_{\alpha\beta}) &= k[1 - (\beta t/r)^2]^{1/2} \end{cases}, & r/\alpha t \leq r/\beta.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Veličiny $R(\omega_\alpha)$, $R(\omega_\beta)$ a $R(\omega_{\alpha\beta})$ snadno odvodíme z (4.49) a (4.50). Pro $r/\alpha t < r/\beta$ přispívají k povrchovému řešení danému vztahy (4.47) a (4.48) pouze první a třetí členy v (4.45) a (4.46). Pro delší časy $t > r/\beta$ třetí členy v (4.45) a (4.46) mizí, ale začne přispívat spolu s prvním členem ještě člen druhý. Za těchto podmínek vede substituce vztahů (4.49) a (4.50) do (4.47) a (4.48) [spolu se zavedením bezrozměrného času τ] na

$$\begin{aligned}
\frac{\pi\mu r}{\beta\sigma_0} u_r^\delta(r, \pi/2, t) &= \frac{\pi\mu x}{\beta\sigma_0} u^\delta(x, 0, \tau) \\
&= 2k^3 \left\{ \frac{\tau S T U}{R_1} [H(\tau-1) - H(\tau-k)] - \frac{\pi(2-k^2)^3}{8G} \delta(\tau-\zeta_R) \right\},
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi\mu r}{\beta\sigma_0} u_\vartheta^\delta(r, \pi/2, t) &= -\frac{\pi\mu x}{\beta\sigma_0} w^\delta(x, 0, \tau) \\
&= k^3 \left\{ \frac{S^2 T}{R_1} [H(\tau-1) - H(\tau-k)] + \frac{T}{R_2} H(\tau-k) \right\},
\end{aligned} \tag{4.52}$$

kde

$$\begin{aligned}
R_1 &= S^4 + 16\tau^4 T^2 U^2, & R_2 &= S^2 - 4\tau^2 T V, \\
S &= k^2 - 2\tau^2, & T &= (\tau^2 - 1)^{1/2}, \\
U &= (k^2 - \tau^2)^{1/2}, & V &= (\tau^2 - k^2)^{1/2}, \\
\tau &= \alpha t/x, & G &= 8(k^2 - 1) - 4k^2 k_R^4 + k^2 k_R^6.
\end{aligned}$$

Povrchové řešení (4.51) a (4.52) je ve shodě s řešením de Hoopa. Levé strany jsou bezrozměrné, pokud je σ_0 bráno jako impuls na jednotku délky. Na obr. 4.9 a obr. 4.11 jsou zobrazeny výsledky vyčíslení vztahů (4.51) a (4.52) pro několik hodnot Poissonova čísla.

Je zřejmé, že v řešení dominuje singularita Rayleighovy vlny, která přichází v době $\tau = \zeta_R$. V případě $u_r^\delta = u^\delta$ je tento člen explicitně obsažen v řešení. Singularita δ -funkcí jsou na obrázku zobrazeny vertikálními úsečkami, jejichž délka odpovídá koeficientům u δ -funkce ve vztahu (4.51).

Odpovídající singularita pro $u_\sigma^\delta = -w^\delta$ je obsažena ve druhém členu vztahu (4.52) a je způsobena zmizením R_2 v čase $t = x/c_R$ ($\tau = \zeta_R$). Singularita může být určena rozvojem R_2 v Taylorovu řadu pro $t = r/c_R$. Budeme uvažovat pouze první dva členy rozvoje

$$R_2(t) \cong R_2(r/c_R) + R_2'(r/c_R)(t - r/c_R),$$

přičemž první člen je nulový, tedy

$$R_2(t) \cong R_2'(r/c_R)(t - r/c_R).$$

Potom

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (r/c_R)^\pm} \left[\frac{\pi \mu r}{\beta \sigma_0} u_\sigma^\delta(r, \pi/2, t) \right] &= \frac{\pi \mu r}{\beta \sigma_0} u_{\sigma R}^\delta(r, \pi/2, t) = \\ &= - \frac{B}{(\tau - \zeta_R)} , \quad \text{pro } r/c_R - \varepsilon < t < r/c_R + \varepsilon, \quad (4.53) \end{aligned}$$

kde $\varepsilon \ll r/c_R$ a

$$B = \frac{k(k^2 - k_R^2)(2 - k_R^2)}{4 \left[(2k^2 - k_R^2)(2 - k_R^2) - 2(2 - k^2)(1 - k_R^2) - 2 \right]}$$

Dále platí, že $(\pi \mu r / \beta \sigma_0) u_{\sigma R}^\delta(r, \pi/2, t) = -(\pi \mu x / \beta \sigma_0) w_R^\delta(x, 0, t)$. Rovnice (4.53) představuje Rayleighovu povrchovou "vlnu" pro $u_{\sigma R}^\delta = -w_R^\delta$, která se chová jako $-1/(t - r/c_R)$ oproti delta funkci v $u_{rR}^\delta = u_R^\delta$. Poznamenejme, že stejně jako u_{rR}^δ je neklesající v prostoru a času a během šíření nemění svůj tvar. Poznamenejme, že ostatní příspěvky [viz (4.51) a (4.52)] k posuvům klesají ve vzdáleném poli pro velké časy jako $1/x$. Lamb byl první, kdo popsal tyto a ještě další

vlastnosti Rayleighových "vln" [LAM04].

Vyhodnocení přesného řešení pro odezvu v rovině symetrie:

Je též zajímavé vyhodnotit odezvu v rovině symetrie $\vartheta=0$. Z (4.36) dostaneme

$$u_r = w, \quad u_\vartheta = u. \quad (4.54)$$

Dále z (4.23) a (4.27)

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(\tau) &= (\tau^2 - 1)^{1/2}, \quad 1 \leq \tau < \infty, \\ \omega_\beta(\tau) &= (\tau^2 - k^2)^{1/2}, \quad k \leq \tau < \infty, \end{aligned} \quad (4.55)$$

kde nyní $\tau = \alpha t / r = \alpha t / z$. Jestliže dosadíme (4.33), (4.34) a $R(\zeta)$ (4.15) do vnitřního řešení (4.45) a (4.46), dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\pi \mu r}{\beta \sigma_0} u_r^\delta(r, 0, t) &= \frac{\pi \mu z}{\beta \sigma_0} w^\delta(0, z, \tau) \\ k \left\{ \tau^2 \left[\frac{k^2 + 2\omega_\alpha^2}{\omega_\alpha R(\omega_\alpha)} \right] H(\tau-1) - 2\tau \left[\frac{\omega_\beta \eta'_\alpha(\omega_\beta)}{R(\omega_\beta)} \right] H(\tau-k) \right\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$u_\vartheta^\delta(r, 0, t) = u^\delta(0, z, t) = 0.$$

Toto řešení je ve shodě s řešením de Hoopa [H0056]. Dá se dokázat, přímo z (4.56), že v okolí $\tau=1$ platí pro dilatační část

$$(\pi \mu z / \beta \sigma_0) w_\alpha^\delta(0, z, 1+) \cong k^{-1} [2(\tau-1)]^{-1/2}, \quad (4.57a)$$

a že chování příčné části posuvu v okolí $\tau=k+$ je

$$(\pi \mu z / \beta \sigma_0) w_\beta^\delta(0, z, k+) \cong -2k^{-5/2} [2(\tau-k)]^{1/2}. \quad (4.57b)$$

Na obr. 4.13 jsou zobrazeny výsledky vyčíslení vztahu (4.56).

Poznámky k numerickému zpracování výše uvedených vztahů:

Vyhodnocení výsledných vztahů (4.45) až (4.48) nečiní vcelku závažné problémy. Pozornost je třeba věnovat pouze vyhodnocování víceznačných funkcí $\eta'_\alpha(\zeta)$ a $\eta'_\beta(\zeta)$, kdy je třeba zvolit správnou větev odmocniny podle podmínek $\text{Re}\{\eta'_{\alpha,\beta}\} \geq 0$ a $\text{Im}\{\eta'_{\alpha,\beta}\} \leq 0$. Tedy pokud výsledek klasické procedury pro

vyhodnocení odmocniny z komplexního čísla nevyhovuje výše uvedeným podmínkám, je třeba změnit fázi tohoto výsledku o π , nebo-li vynásobit ho -1 .

Řešení obsažená ve vztazích (4.45) až (4.48) mohou být zobecněna pro libovolný průběh funkce $F(t)$ pomocí konvolučního teorému.

$$\begin{bmatrix} u_r^F(r, \vartheta, T) \\ u_\vartheta^F(r, \vartheta, T) \end{bmatrix} = \int_0^T F(T-t) \begin{bmatrix} u_r^\delta(r, \vartheta, t) \\ u_\vartheta^\delta(r, \vartheta, t) \end{bmatrix} dt, \quad (4.58)$$

kde u_r^δ a u_ϑ^δ jsou dány vztahy (4.45) až (4.48).

Jednou z velice důležitých funkcí buzení $F(t)$ je skoková Heavisideova funkce $H(t)$, která se dá jednak daleko lépe simulovat při měření než Diracova "funkce" a pro kterou jsou navíc vypočteny mnohé případy napjatosti poloprostoru i desek.

Dosadíme-li do vztahu (4.58) za $F(t)$ Heavisideovu funkci $H(t)$, dostaneme

$$\begin{bmatrix} u_r^H(r, \vartheta, T) \\ u_\vartheta^H(r, \vartheta, T) \end{bmatrix} = \int_0^T \begin{bmatrix} u_r^\delta(r, \vartheta, t) \\ u_\vartheta^\delta(r, \vartheta, t) \end{bmatrix} dt. \quad (4.59)$$

Je tedy vidět, že odezvu na skokovou funkci dostaneme integrací odezvy na Diracovu "funkci", a právě s touto integrací jsou jisté problémy.

Věnujme se nejprve radiální výchylce

$$u_r^H(r, \vartheta, T) = \int_0^T u_r^\delta(r, \vartheta, t) dt. \quad (4.60)$$

Dosadíme-li za integrand vztah (4.45) a označíme-li jednotlivé části vztahu (4.45) ve složených závorkách postupně U_1 , U_2 a U_3 , dostaneme

$$u_r^H(r, \vartheta, T) = \frac{\sigma_0}{\pi \mu} \int_0^T (U_1 + U_2 + U_3) dt. \quad (4.61)$$

Výpočet se nám tedy rozpadl na výpočet tří integrálů, přičemž integrál z U_1 je nevlastní a se zbývajícimi integrály nejsou žádné problémy. Nyní se budeme zabývat

integrací U1

$$\begin{aligned}
 \int_0^T U_1 dt &= \int_{r/\alpha}^T \frac{\alpha t}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{k^2 + 2\omega_\alpha^2(t)}{R(\omega_\alpha(t))} \frac{d\omega_\alpha(t)}{dt} \right] dt = \\
 &= \int_{r/\alpha}^T \frac{\alpha t}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{k^2 + 2\omega_\alpha^2(t)}{R(\omega_\alpha(t))} \frac{\frac{\alpha t}{r} \frac{\alpha}{r}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha t}{r}\right)^2 - 1}} \cos \vartheta \right] dt + \\
 &+ \int_{r/\alpha}^T \frac{\alpha t}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{k^2 + 2\omega_\alpha^2(t)}{R(\omega_\alpha(t))} \left(-i \frac{\alpha}{r}\right) \sin \vartheta \right] dt = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{substituce v prvním integrálu} \\ \gamma = \sqrt{\left(\frac{\alpha t}{r}\right)^2 - 1} \end{array} \right| = \\
 &\int_0^{\sqrt{(\alpha T/r)^2 - 1}} \frac{\alpha}{r} t(\gamma) \operatorname{Re} \left[\frac{k^2 + 2\omega_\alpha^2[t(\gamma)]}{R(\omega_\alpha[t(\gamma)])} \cos \vartheta \right] d\gamma + \\
 &+ \int_{r/\alpha}^T \frac{\alpha t}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{k^2 + 2\omega_\alpha^2(t)}{R(\omega_\alpha(t))} \left(-i \frac{\alpha}{r}\right) \sin \vartheta \right] dt \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

Nyní se věnujme tangenciální výchylce

$$u_{\vartheta}^H(r, \vartheta, T) = \int_0^T u_{\vartheta}^{\delta}(r, \vartheta, t) dt. \quad (4.63)$$

Dosadíme-li za integrand vztah (4.46) a označíme-li jednotlivé části vztahu (4.46) ve složených závorkách postupně W1, W2 a W3, dostaneme

$$u_{\vartheta}^H(r, \vartheta, T) = \frac{\sigma_0}{\pi \mu} \int_0^T (W1+W2+W3) dt. \quad (4.64)$$

Výpočet se nám tedy opět rozpadl na výpočet tří integrálů, přičemž integrál z W2 a W3 je nevlastní a s integrálem z W1 nejsou žádné problémy. Nyní se budeme zabývat integrací W2

$$\begin{aligned}
 \int_0^T W2 \, dt &= \int_{r/\beta}^T \frac{\alpha t}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_\beta(t)\eta'_\alpha[\omega_\beta(t)]}{R[\omega_\beta(t)]} \frac{d\omega_\beta(t)}{dt} \right] dt = \\
 &= \int_{r/\beta}^T \frac{\alpha t}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_\beta(t)\eta'_\alpha[\omega_\beta(t)]}{R[\omega_\beta(t)]} \frac{\frac{\beta t}{r} \frac{\beta}{r}}{\sqrt{\left(\frac{\beta t}{r}\right)^2 - 1}} k \cos \vartheta \right] dt + \\
 &+ \int_{r/\beta}^T \frac{\alpha t}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_\beta(t)\eta'_\alpha[\omega_\beta(t)]}{R[\omega_\beta(t)]} \left(-i\frac{\alpha}{r}\right) \sin \vartheta \right] dt = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{substituce v prvním integrálu} \\ \gamma = \sqrt{\left(\frac{\beta t}{r}\right)^2 - 1} \end{array} \right| = \\
 &= \int_0^{\sqrt{(\beta T/r)^2 - 1}} \frac{\alpha}{r} t(\gamma) \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_\beta[t(\gamma)]\eta'_\alpha[\omega_\beta[t(\gamma)]]}{R[\omega_\beta[t(\gamma)]]} k \cos \vartheta \right] d\gamma + \\
 &+ \int_{r/\beta}^T \frac{\alpha t}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_\beta(t)\eta'_\alpha[\omega_\beta(t)]}{R[\omega_\beta(t)]} \left(-i\frac{\alpha}{r}\right) \sin \vartheta \right] dt .
 \end{aligned}$$

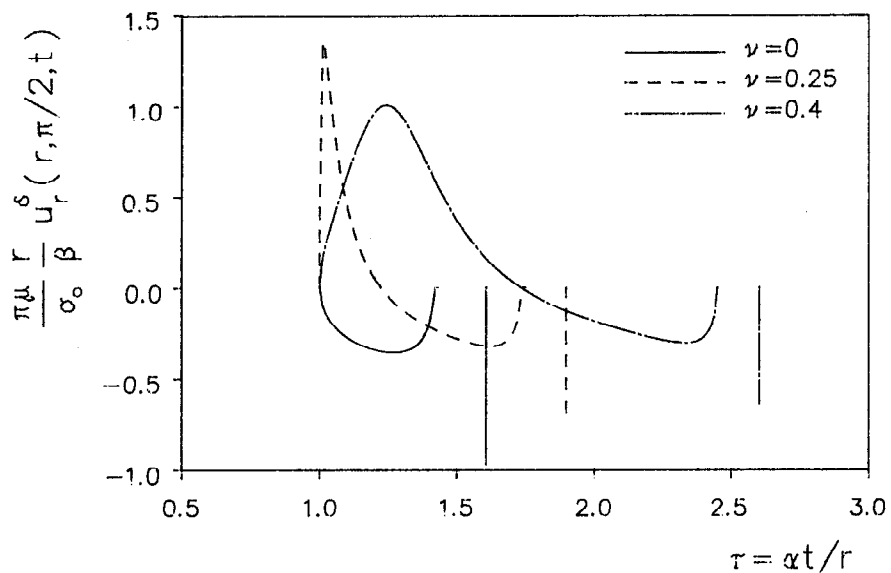
Nyní se budeme zabývat integrací W3

$$\int_0^T W3 \, dt = \int_{t_{kr}}^{r/\beta} \frac{\alpha t}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_{\alpha\beta}(t)\eta'_\alpha[\omega_{\alpha\beta}(t)]}{R[\omega_{\alpha\beta}(t)]} \frac{d\omega_{\alpha\beta}(t)}{dt} \right] dt =$$

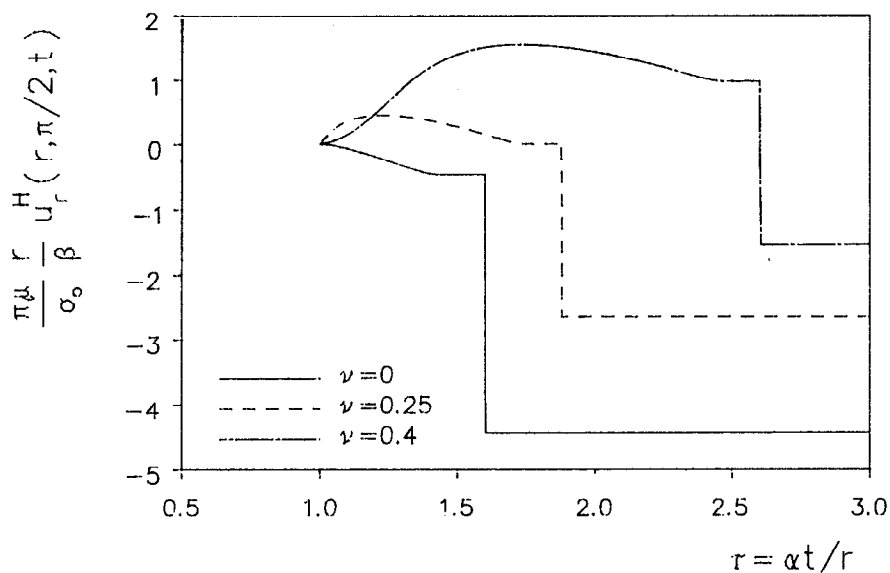
$$\begin{aligned}
&= \int_{t_{kr}}^{r/\beta} \frac{\alpha t}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_{\alpha\beta}(t)\eta'_{\alpha}[\omega_{\alpha\beta}(t)]}{R[\omega_{\alpha\beta}(t)]} \frac{\frac{\beta t}{r} \frac{\beta}{r}}{\sqrt{\left(\frac{\beta t}{r}\right)^2 - 1}} (-ik \cos \vartheta) \right] dt + \\
&+ \int_{t_{kr}}^{r/\beta} \frac{\alpha t}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_{\alpha\beta}(t)\eta'_{\alpha}[\omega_{\alpha\beta}(t)]}{R[\omega_{\alpha\beta}(t)]} \left(-i\frac{\alpha}{r}\right) \sin \vartheta \right] dt = \\
&= \left[\begin{array}{l} \text{substituce v prvním integrálu} \\ \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{\beta t}{r}\right)^2} \end{array} \right] = \\
&= \int_{\frac{\alpha}{r} t(\gamma)}^0 \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_{\alpha\beta}[t(\gamma)]\eta'_{\alpha}[\omega_{\alpha\beta}[t(\gamma)]]}{R[\omega_{\alpha\beta}[t(\gamma)]]} ik \cos \vartheta \right] d\gamma + \\
&\sqrt{1 - \left[(\sin \vartheta + \sqrt{k^2 - 1} \cos \vartheta) / k \right]^2} \\
&+ \int_{t_{kr}}^{r/\beta} \frac{\alpha t}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{-i2\omega_{\alpha\beta}(t)\eta'_{\alpha}[\omega_{\alpha\beta}(t)]}{R[\omega_{\alpha\beta}(t)]} \left(-i\frac{\alpha}{r}\right) \sin \vartheta \right] dt .
\end{aligned}$$

Použijeme-li konvolučního vztahu (4.58), můžeme ukázat, že pro vstupní skokovou funkci $F(t)=H(t)$, $u_{rR}^H(r, \pi/2, t)$ se chová jako $H(t-r/c_R)$ a $u_{\vartheta R}^H(r, \pi/2, t)$ se chová jako $-\log|t-r/c_R|$.

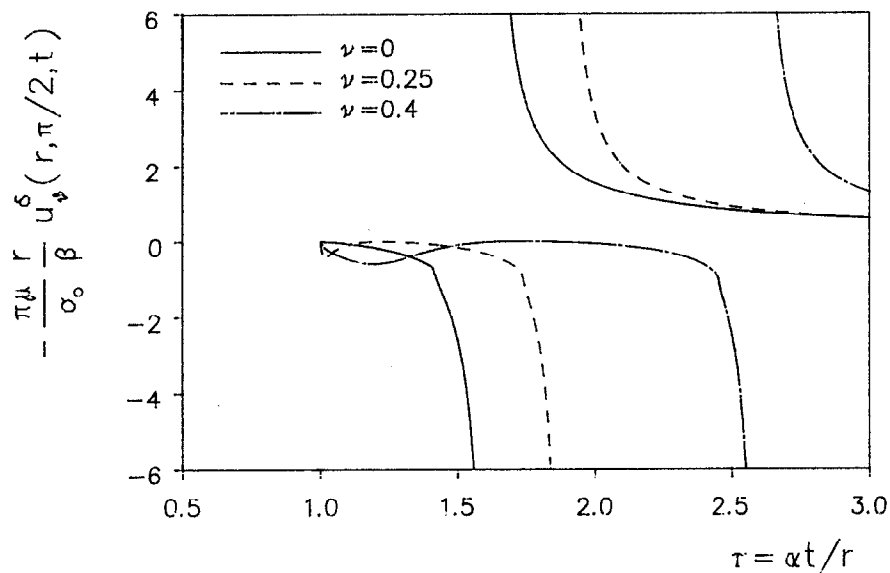
Průběhy radiálních, tangenciálních, horizontálních a vertikálních výchylek uvnitř poloprostoru i na povrchu při skokovém buzení jsou zobrazeny na obr. 4.10, obr. 4.12, obr. 4.14, obr. 4.16, obr. 4.18, obr. 4.20 a obr. 4.22.



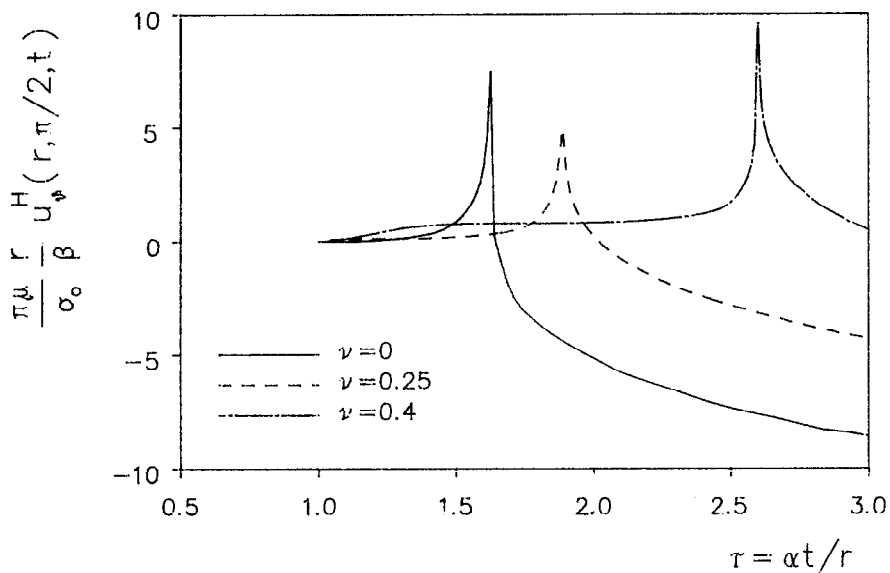
Obr. 4.9:
 Časový průběh normované radiální výchylky na povrchu polo-
 prostoru při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot
 Poissonova čísla; časový průběh buzení - Dirac



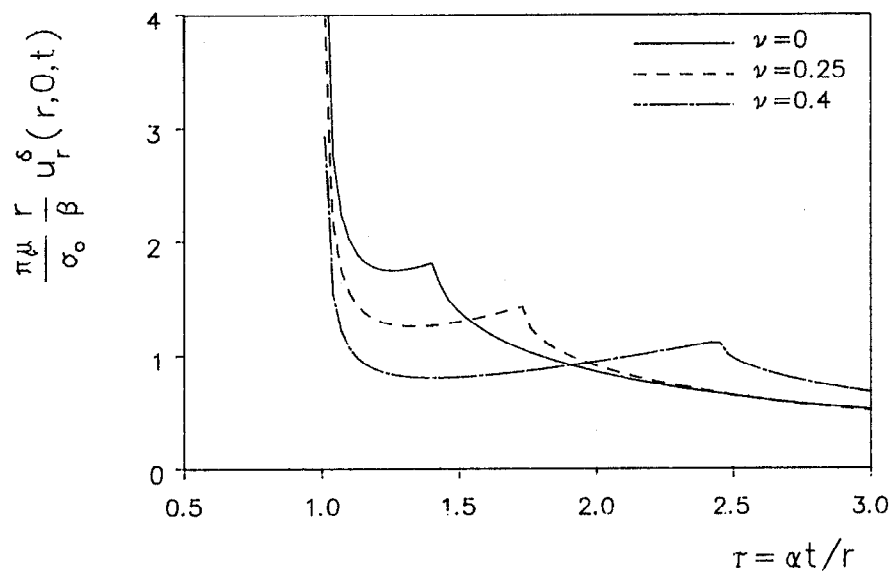
Obr. 4.10:
 Časový průběh normované radiální výchylky na povrchu polo-
 prostoru při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot
 Poissonova čísla; časový průběh buzení - Heaviside



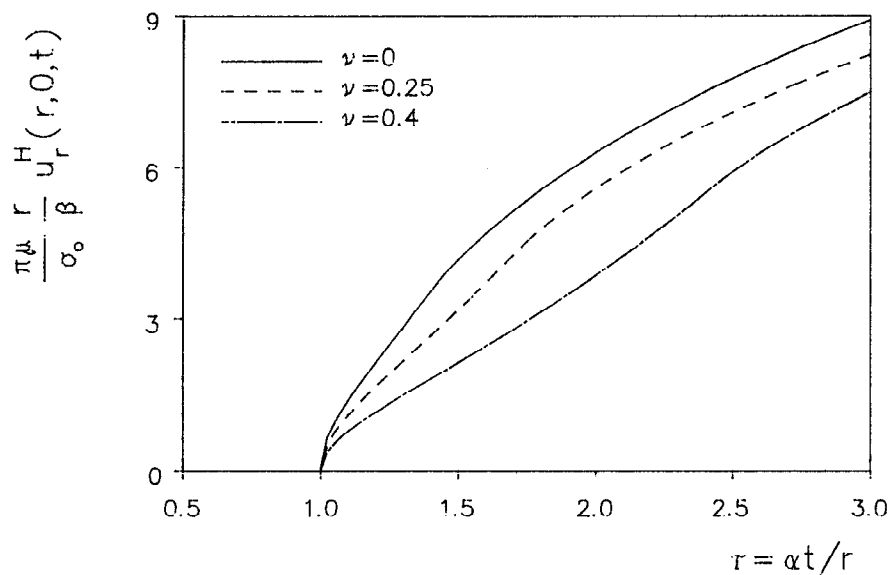
Obr. 4.11:
 Časový průběh normované tangenciální výchylky na povrchu poloprostoru při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot Poissonova čísla; časový průběh buzení - Dirac



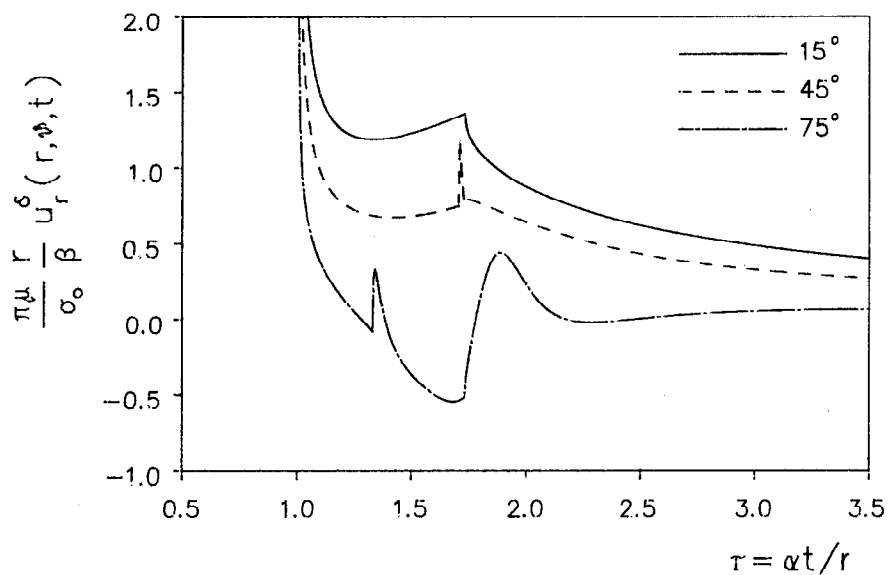
Obr. 4.12:
 Časový průběh normované tangenciální výchylky na povrchu poloprostoru při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot Poissonova čísla; časový průběh buzení - Heaviside



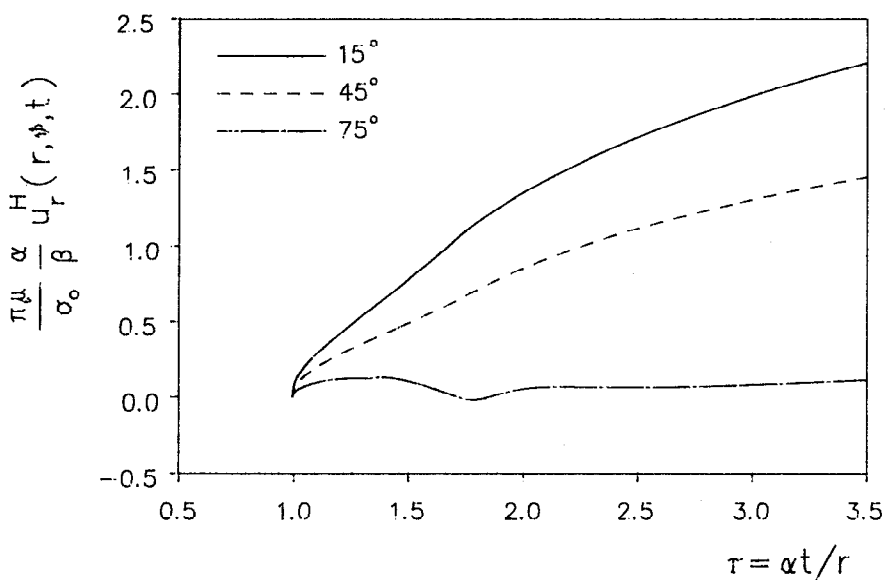
Obr. 4.13:
 Časový průběh normované radiální výchylky v rovině symetrie při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot Poissonova čísla; časový průběh buzení - Dirac



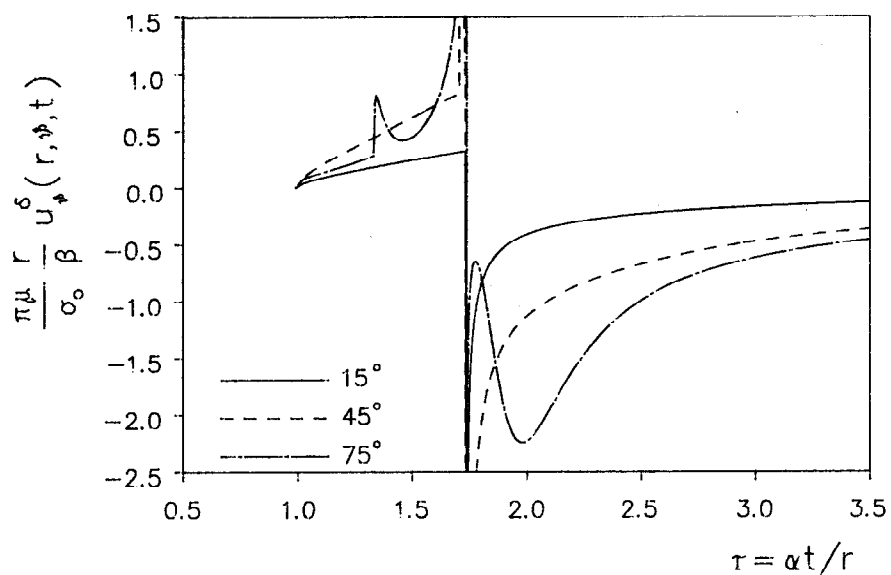
Obr. 4.14:
 Časový průběh normované radiální výchylky v rovině symetrie při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot Poissonova čísla; časový průběh buzení - Heaviside



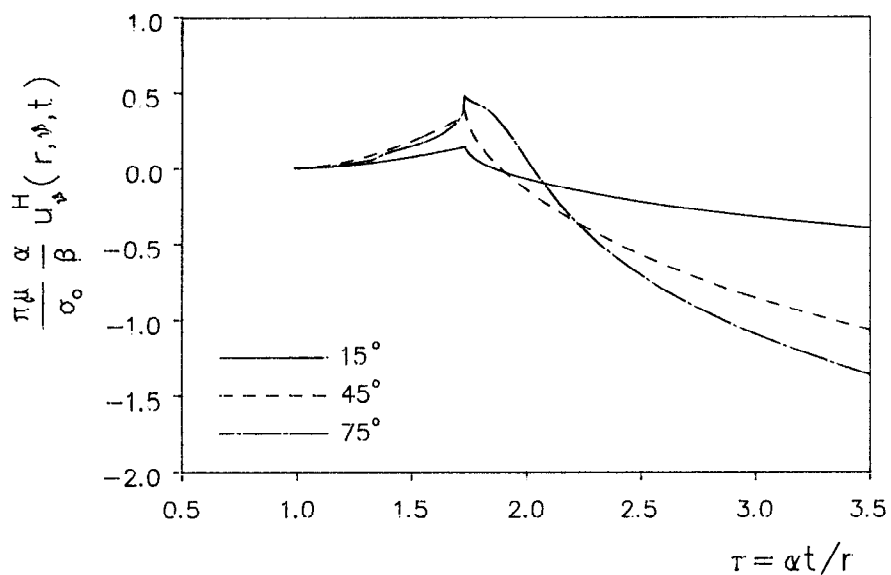
Obr. 4.15:
 Časový průběh normované radiální výchylky uvnitř polo-
 prostoru při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot
 úhlu φ ; časový průběh buzení - Dirac



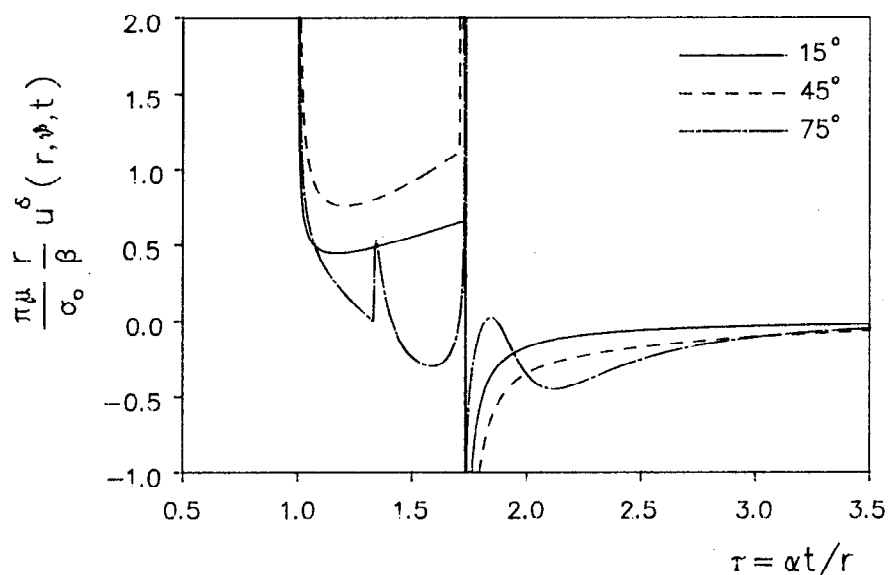
Obr. 4.16:
 Časový průběh normované radiální výchylky uvnitř polo-
 prostoru při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot
 úhlu φ ; časový průběh buzení - Heaviside



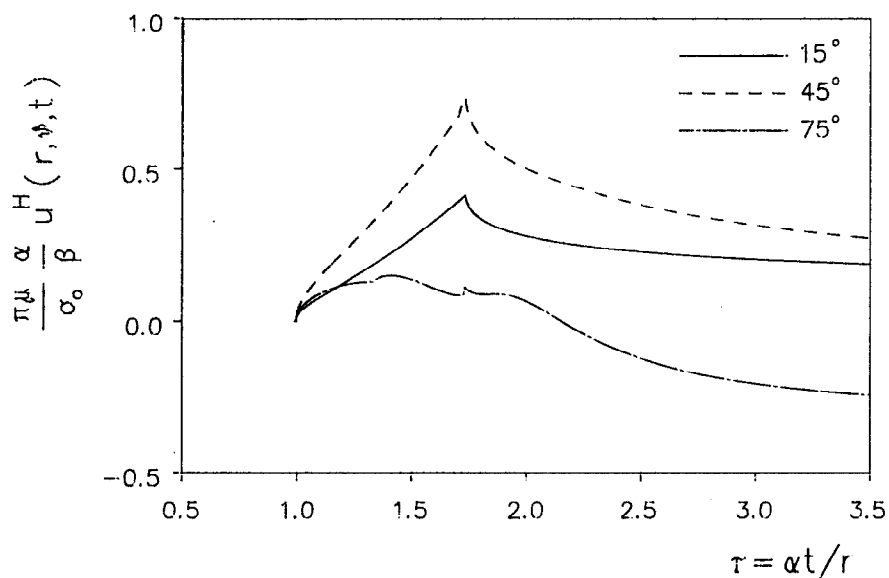
Obr. 4.17:
 Časový průběh normované tangenciální výchylky uvnitř polo-
 prostoru při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot
 úhlu φ ; časový průběh buzení - Dirac



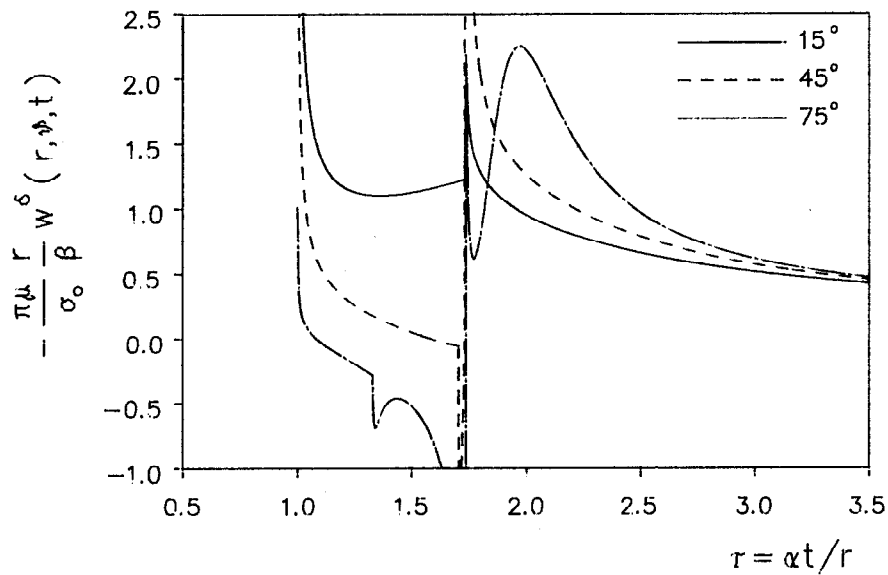
Obr. 4.18:
 Časový průběh normované tangenciální výchylky uvnitř polo-
 prostoru při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot
 úhlu φ ; časový průběh buzení - Heaviside



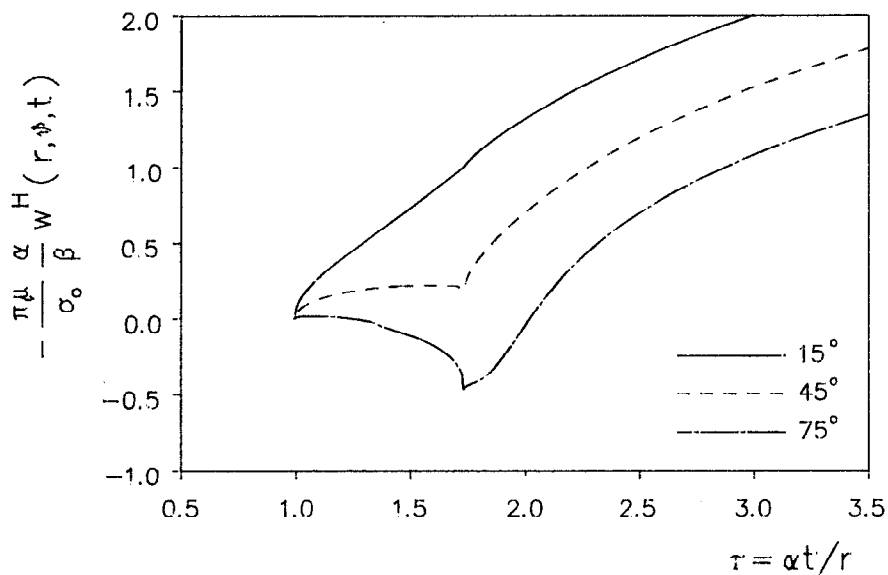
Obr. 4.19:
 Časový průběh normované horizontální výchylky uvnitř polo-
 prostoru při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot
 úhlu φ ; časový průběh buzení - Dirac



Obr. 4.20:
 Časový průběh normované horizontální výchylky uvnitř polo-
 prostoru při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot
 úhlu φ ; časový průběh buzení - Heaviside



Obr. 4.21:
 Časový průběh normované vertikální výchylky uvnitř polo-
 prostoru při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot
 úhlu ϑ ; časový průběh buzení - Dirac



Obr. 4.22:
 Časový průběh normované vertikální výchylky uvnitř polo-
 prostoru při povrchovém přímkovém buzení pro několik hodnot
 úhlu ϑ ; časový průběh buzení - Heaviside

V. Závěr

Ve zprávě byla zrekapitulována řešení napjatosti polo-
prostoru při povrchovém přímkovém buzení, poněvadž metody
řešení tohoto problému tvoří jeden ze základů přesné
paprskové metody, jejíž zvládnutí a následná aplikace na
problematiku akustické emise je dílčím cílem grantu ČSAV
č.27007/91.

Byla ukázána výhodnost integrálních transformací při
řešení této úlohy a podrobně popsána Cagniardova metoda
řešení zpětné Laplaceovy transformace.

Na tuto zprávu v budoucnu naváže zpráva o napjatosti
poloprostoru při povrchovém bodovém buzení a zpráva o přesné
paprskové metodě se zvláštním zřetelem na jednovrstvé
prostředí (tlustá deska).

VI. Seznam použité literatury

- [CAG39] Cagniard, L. :
Reflexion et refraction des Ondes
seismiques progressives.
Gauthier Villars, Paris, (1939)
[Reflection and Refraction of Progressive Seismic
Waves. (anglický překlad od E.A.Flinna a C.H.Dixe)
McGraw-Hill, New York, (1962)]
- [CER81] Ceranoglu, A.N.; Pao, Y.H. :
Propagation of Elastic Pulses
and Acoustic Emission in a Plate.
Journal of Applied Mechanics,
Vol.48, (1981), str.125-147
- [EWI57] Ewing, W.M.; Jardetzky, W.S.; Press, F. :
Elastic Waves in Layered Media.
McGraw-Hill, New York, (1957)
- [H0056] de Hoop, A.T. :
The Surface Line Source Problem.
Second Annual Report, Seismic Scattering Project;
Institute of Geophysics, U.C.L.A.,
Los Angeles, California, (1956-1957)
- [LAM04] Lamb, H. :
On the Propagation of Tremors Over
the Surface of an Elastic Solid.
Philos. Trans. Roy. Soc. (London),
Ser.A, Vol.203, (1904), str.1-42

- [LAP49] Lapwood, E.R. :
The Disturbance Due to a Line
in a Semi-infinite Elastic Medium.
Philos. Trans. Roy. Soc. (London),
Ser.A, Vol.242, (1949), str.63-100
- [MIK78] Miklowitz, J. :
The Theory of Elastic Waves and Waveguides.
North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1978)
- [NAK25] Nakano, H. :
On Rayleigh Waves.
Japan. J. Astron. Geophys.,
Vol.2, (1925), str.233-326
- [PA077] Pao, Y.H. ; Gajewski, R. ;
The Generalized Ray Theory and Transient
Response of Layered Elastic Solids.
Physical Acoustics, Vol.13, ed. Mason, W.P.
Academic Press, New York, (1977)
- [PA079] Pao, Y.H. ; Gajewski, R. ; Ceranoglu, A.N. :
Acoustic Emission and Transient Waves
in an Elastic plate.
Journal of the Acoustical Society of America,
Vol.65, (1979), str.96-105
- [REK81] Rektorys, K. :
Přehled užité matematiky.
SNTL, Praha, (1981), str. 486
- [VAL83] Valeš, F. :
Napjatost tlusté desky příčně
nestacionárně zatížené :
I. část - Odvození Laplaceových obrazů
pro posuvy a napětí.
Výzkumná zpráva ÚT ČSAV, 2847/83, Praha, (1983)

[VAL84] Valeš, F.:

Napjatost tlusté desky příčně
nestacionárně zatížené :

II.část - Zpětná transformace vztahů
pro posuvy a napětí.

Výzkumná zpráva ÚT ČSAV, Z887/84, Praha, (1984)