National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2001
Svratka, Czech Republic, May 14 – 17, 2001

MATRIX TECHNIQUES FOR MODELING STRESS WAVES IN MULTILAYERED MEDIA

Petr Hora*

Summary: *This paper describes the development of a general purpose model for wave propagation in Cartesian system. When isotropic materials are used, the model can account for elastic and visco-elastic isotropic materials, single or multi-layered structures, and free or leaky systems. Based on the geometry and material properties of the system, the model determines what resonances can exist in order to satisfy the boundary conditions and the bulk wave propagation characteristics in each of the layers. These resonances control how ultrasonic waves will be guided in the system and what properties each of these waves will have.*

Key words: *guided waves, dispersive curves*

1 Úvod

V nedestruktivních testovacích systémech se v poslední době stále více využívají tzv. vlnovodné vlny (guided waves). Pro efektivní návrh těchto systémů je výhodné mít obecný model šíření vln ve vícevrstvém prostředí. V případě izotropních materiálů lze model použít pro elastické materiály, jedno- a více-vrstvé struktury, nerozptylové a rozptylové systémy. Podle geometrie a materiálových vlastností systému model určuje, jaké rezonance mohou existovat v jednotlivých vrstvách. Tyto rezonance řídí, jak se budou ultrazvukové vlny šířit v systému a jaké vlastnosti budou tyto vlny mít.

2 Šíření vln pro případ kartézské souřadné soustavy

Nejprve budeme uvažovat šíření vln v izotropní rovinné desce [3]. Rovnice polí pro výchylky a napětí v rovinné izotropní elastické pevné vrstvě mohou být vyjádřeny jako superpozice polí čtyř objemových vln uvnitř vrstvy. Přístup proto spočívá v odvození rovnic polí pro objemové vlny, které jsou řešením vlnové rovnice v neohraničeném prostředí, a následném zavedení okrajových podmínek na rozhraních mezi dvěma vrstvami. Tím se definují pravidla pro vazbu mezi vrstvami a pravidla pro superpozici objemových vln. Analýza vrstev je omezena na dva rozměry s požadavkem rovinného přetvoření a pohybem pouze v této rovině.

2.1 Rovinné vlny v neohraničeném elastickém prostředí

Odvození pohybových rovnic pro neohraničené elastické prostředí je obsaženo v mnoha učebnicích [1]. Obvyklým přístupem je začít s infinitesimální krychličkou v neohraničeném elastickém izotropním prostředí hustoty ρ. Využijeme kartézský souřadný systém s výchylkami $\mathbf{u}$ (u_1, u_2 a u_3) v souřadném systému $\mathbf{x}$ (x_1, x_2 a x_3). Použitím druhého Newtonova zákona dostaneme základní napěťové pohybové rovnice pro elastické prostředí pomocí složek napětí působící na

*Ing. Petr Hora, CSc., Ústav termomechaniky AV ČR, Centrum diagnostiky materiálu, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň; tel. +420 19 7236415, e-mail: hora@cdm.it.cas.cz

strany krychličky. Vhodnější je vyjádřit si tyto rovnice pomocí výchylek, což vede na výchylkovou pohybovou rovnici, kterou lze vyjádřit ve vektorovém tvaru:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{1}$$

kde kde λ a μ jsou Lamého elastické konstanty.

Tato rovnice nemůže být integrována přímo; vhodnost předpokládaného tvaru řešení se musí kontrolovat derivováním a substitucí. Předpokládá se, že vlnové čelo je nekonečná rovina, která je kolmá na směr šíření. Dále se předpokládá, že v libovolném místě ve směru šíření a v libovolném okamžiku, jsou všechny výchylky v rovině vlnového čela stejné. Tím se definuje homogenní rovinná vlna. Za těchto předpokladů existují dvě řešení, jedno pro longitudinální vlny a druhé pro příčné vlny. Částice se u longitudinálních vln pohybují pouze ve směru šíření a vlnový pohyb spočívá pouze ve změně objemu. Částice se u příčných vln pohybují kolmo na směr šíření a pohyb spočívá v rotaci média bez změny objemu. Vhodný způsob prezentace řešení ve vektorovém tvaru je Helmholtzova metoda, ve které longitudinální vlny (L) jsou popsány skalární funkcí ϕ a příčné vlny (S) vektorovou funkcí $\mathbf{H}$, jejíž směr je kolmý jak na směr šíření vln, tak na směr pohybu částic:

$$\phi = A_L e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}, \qquad |\mathbf{H}| = A_S e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \tag{2}$$

Zde A_L a A_S jsou longitudinální a příčné vlnové amplitudy, $\mathbf{k}$ je vektor vlnových čísel a ω je úhlová frekvence. Vektor vlnových čísel má směr šíření vlny a popisuje její vlnovou délku a rychlost.

$$\text{Vlnová délka} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} \qquad \text{Rychlost} = c = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \tag{3}$$

Pro zobecnění můžeme uvažovat vlnové amplitudy jako komplexní veličiny $A_L e^{i\psi}$, $A_S e^{i\psi}$, kde ψ je fáze vlny v prostorovém a časovém počátku $x = 0,\ t = 0$.

Pole výchylek je dáno těmito operacemi:

$$\mathbf{u} = \underbrace{\nabla \phi}_{\mathbf{u}_L} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{H}}_{\mathbf{u}_S} \tag{4}$$

kde $\times$ označuje vektorový součin, $\nabla\phi$ odpovídá dilatačnímu pohybu a $\nabla \times \mathbf{H}$ odpovídá ekvivolumetrickému pohybu. Substitucí do pohybové rovnice (1) obdržíme rychlosti vln, c_1 a c_2, jako funkce materiálových konstant:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \qquad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \tag{5}$$

kde E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonovo číslo.

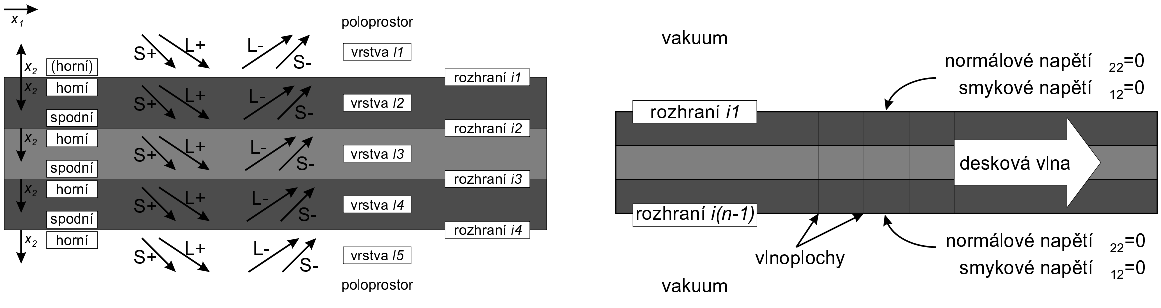
2.2 Rovinné vlny ve dvourozměrném prostoru

Ve vícevrstvém deskovém modelu se obvykle předpokládá, že vlnové délky jsou podstatně menší než šířka desky a šířka vlnových polí a tedy, že předpoklad rovinného přetvoření je platný. Souřadný systém může být potom redukován na rovinu definovanou směrem šíření vln a normálou k desce. V našem případě je tedy rovina definována osou x_1, která je rovnoběžná s deskou, a osou x_2, která je kolmá na desku. Obr. 1a) ilustruje souřadný systém, který bude použit pro desku. Při rovinném přetvoření se žádná veličina vzhledem ke směru osy x_3 nemění, tj. $\partial/\partial x_3 = 0$. Dále, jak je obvyklé v ultrazvukových aplikacích, je model omezen na vlny, u nichž se pohyb částic odehrává pouze v rovině $u_3 = 0$, tedy vylučujeme Loveho módy.

Z rovnice (4) plynou pro výchylky longitudinálních a příčných vln vztahy:

$$\mathbf{u}_L = \nabla\phi = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{bmatrix} A_L e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \qquad \mathbf{u}_S = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{bmatrix} A_S e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \tag{6}$$

ve kterých vektorový potenciál $\mathbf{H}$ míří ve směru osy x_3, tj. pohyb částic se odehrává v rovině x_1x_2.



(a) (b)

Obrázek 1: Vícevrstvá deska: a) Systém značení, b) Okrajové podmínky.

2.3 Superpozice rovinných vln ve vrstevnaté desce

Vývoj modelu pro vlnový pohyb ve vícevrstvé desce je dokončen superpozicí longitudinálních a příčných objemových vln a zavedením okrajových podmínek na rozhraní mezi vrstvami. Na každém rozhraní se předpokládá osm vln: longitudinální a příčné vlny dopadající na rozhraní shora a procházející dolů (L+, S+) a podobně longitudinální a příčné vlny dopadající na rozhraní zdola a procházející nahoru (L-, S-). V každé vrstvě vícevrstvé desky tedy existují čtyři vlny, viz. obr. 1a). Snellův zákon pro interakci vln vyžaduje, aby všechny vlny měly na každém rozhraní stejnou frekvenci a prostorové vlastnosti ve směru osy x_1. Z toho vyplývá, že všechny výchylkové a napěťové rovnice mají stejné ω a stejnou $k_1 = \xi$ složku vlnového čísla (deskové vlnové číslo), která je projekcí vektoru vlnového čísla objemové vlny do rozhraní. Všechny rovnice polí pro všechna místa ve všech vrstvách tedy obsahují následující faktor, F, který je vzhledem k systému invariantní:

$$F = e^{i(\xi x_1 - \omega t)} \tag{7}$$

S použitím rovnic (3) a (5) a pomocí deskového vlnového čísla a rychlosti objemových vln lze také vyjádřit složky k_2 objemových vln v každé vrstvě :

$$k_{2L\pm} = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \xi^2}, \qquad k_{2S\pm} = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - \xi^2} \tag{8}$$

Znaménka + a - opět označují vlny putující ve směru kladné (dolů) resp. záporné (nahoru) osy x_2. Pokud je ω^2/c_1^2 větší než ξ^2, pak k_2 je reálné a vlna je homogenní a putuje pod nějakým nenulovým úhlem vzhledem ke směru osy x_1. Pokud je ω^2/c_1^2 menší než ξ^2, pak k_2 je výhradně imaginární a vlna je nehomogenní, neboli zanikající, a putuje ve směru osy x_1 a amplituda se jí tlumí ve směru osy x_2.

Použijeme-li rovnice polí, můžeme z amplitud objemových vln zjistit výchylky a napětí v libovolném místě ve vrstvě. Výchylky a napětí v libovolném místě ve vrstvě mohou být tedy nalezeny sumací příspěvků vyvolaných čtyřmi vlnovými složkami ve vrstvě. Pro vícevrstvý systém jsou zajímavé ty veličiny, které musí být spojité na rozhraní: dvě složky výchylky, u_1 a u_2, normálové napětí, σ_{22}, a smykové napětí, σ_{12}. Provedeme-li vhodnou substituci,$\zeta_1 = \sqrt{\omega^2/c_1^2 - \xi^2}$, $\zeta_2 = \sqrt{\omega^2/c_2^2 - \xi^2}$, $g_{\zeta_1} = e^{i\zeta_1 x_2}$, $g_{\zeta_2} = e^{i\zeta_2 x_2}$, a zanedbáme společný faktor, F, můžeme veličiny pole ve vrstvě vyjádřit maticovou rovnicí:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi g_{\zeta_1} & \frac{\xi}{g_{\zeta_1}} & \zeta_2 g_{\zeta_2} & -\frac{\zeta_2}{g_{\zeta_2}} \\ \zeta_1 g_{\zeta_1} & -\frac{\zeta_1}{g_{\zeta_1}} & -\xi g_{\zeta_2} & -\frac{\xi}{g_{\zeta_2}} \\ i\rho\left(\omega^2 - 2c_2^2\xi^2\right) g_{\zeta_1} & \frac{i\rho\left(\omega^2-2c_2^2\xi^2\right)}{g_{\zeta_1}} & -2i\rho\xi c_2^2\zeta_2 g_{\zeta_2} & \frac{2i\rho\xi c_2^2\zeta_2}{g_{\zeta_2}} \\ 2i\rho\xi c_2^2\zeta_1 g_{\zeta_1} & \frac{-2i\rho\xi c_2^2\zeta_1}{g_{\zeta_1}} & i\rho\left(\omega^2 - 2c_2^2\xi^2\right) g_{\zeta_2} & \frac{i\rho\left(\omega^2-2c_2^2\xi^2\right)}{g_{\zeta_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{L+} \\ A_{L-} \\ A_{S+} \\ A_{S-} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Matice v rovnici (9) je matice pole, která popisuje vazbu mezi vlnovými amplitudami a výchylkami a napětími v libovolném místě v libovolné vrstvě. Její koeficienty závisí na příčném umístění v desce (x_2), materiálových vlastnostech vrstvy v daném místě (ρ, c_1 a c_2), frekvenci (ω) a invariantním deskovém vlnovém čísle ($\xi = k_1$). **Počátek souřadnice x_2 může být umístěn libovolně a může být dokonce pro každou vrstvu jiný, protože fázový rozdíl mezi vrstvami může být zahrnut do fáze komplexních vlnových amplitud.** Matici pole budeme označovat zkratkou [**D**].

3 Metoda přenosové matice pro elastické vlny a pravé módy

Základem metody přenosové matice je postupná kondenzace vícevrstvého systému až na množinu čtyř rovnic, které vážou okrajové podmínky na prvním rozhraní s okrajovými podmínkami na posledním rozhraní. Při tomto procesu jsou eliminovány rovnice pro vnitřní rozhraní, takže pole ve všech vrstvách desky jsou popsána výhradně veličinami vnějších okrajových podmínek. Základní princip popisu vrstevnatého prostředí přenosovou maticí se připisuje Thomsonovi [5], který ukázal, že k popisu přenosu vln skrz libovolný počet vrstev lze použít matice.

Obrázek 1a) znázorňuje používaný systém značení. Pro ilustraci je uveden systém o pěti vrstvách, který se skládá z třívrstvé desky a dvou poloprostorů. Poloprostory považujeme také za vrstvy, i když se jedná o vakuum. Vrstvy systému jsou označené $l1$ až $l5$ a rozhraní $i1$ až $i4$. Ačkoliv orientace desky v prostoru je libovolná, je vhodné odkazovat se na vrstvy pomocí jejich vertikální pozice v systéme a na rozhraní pomocí horních a dolních povrchů jednotlivých vrstev, jak je uvedeno na obrázku 1a). Každá vrstva má svůj vlastní počátek osy x_2 definovaný svým horním rozhraním, kromě první vrstvy ($l1$), která má počátek na rozhraní s druhou vrstvou ($l2$), abychom nemuseli mít počátek v $-\infty$.

Předpokládejme, že výchylky a napětí na prvním rozhraní ($l1$) jsou známy. Amplitudy čtyř vln v horní vrstvě $l2$ lze najít invertováním matice $[D]$:

$$\begin{bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(L-)} \\ A_{(S+)} \\ A_{(S-)} \end{bmatrix}_{l2} = [D]^{-1}_{l2,\text{top}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l2,\text{top}} \tag{10}$$

Výchylky a napětí na dně této vrstvu, tj. na druhém rozhraní ($i2$), lze najít z vlnových amplitud ve vrstvě $l2$:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l2,\text{bottom}} = [D]_{l2,\text{bottom}} \cdot [D]^{-1}_{l2,\text{top}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l2,\text{top}} \tag{11}$$

Maticový součin v této rovnici nyní váže výchylky a napětí mezi horním a dolním povrchem jedné vrstvy a budeme se na něj odkazovat jako na matici vrstvy, $[L]$. Pro případ druhé vrstvy máme:

$$[L]_{l2} = [D]_{l2\text{bottom}} \cdot [D]^{-1}_{l2,\text{top}} \tag{12}$$

Inverze matice $[D]$ může být vyjádřena explicitně [4] a lze tedy explicitně vyjádřit i koeficienty matice $[L]$, což je výhodné zejména pro analytické studie.

Výchylky a napětí musí být na *svařeném* rozhraní mezi vrstvami spojité. Tedy

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l3,\text{top}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l2,\text{bottom}} = [L]_{l2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l2,\text{top}} \tag{13}$$

Tento proces můžeme postupně provádět pro všechny následující vrstvy. Výsledkem je rovnice:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{ln,\text{top}} = [S] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{l2,\text{top}} \tag{14}$$

kde n je číslo poslední vrstvy (v našem případě 5) a $[S]$ je matice systému, vytvořená maticovým součinem jednotlivých matic vrstev.

4 Metoda globální matice

V roce 1964 publikoval Knopoff zcela odlišnou maticovou formulaci pro vícevrstvé prostředí [2], která je alternativou k technice přenosové matice a která může být použita pro odstranění problému vysoké hodnoty součinu frekvence a tloušťky. Výhody metody spočívají v její robustnosti (zůstává stabilní i pro vysoké hodnoty součinů frekvence a tloušťky) a dále v tom, že metoda globální matice umožňuje použít stejnou základní matici jak pro reálné, tak pro komplexní vlnové číslo; vakuové, kapalné nebo tuhé poloprostory a jak pro modální řešení, tak pro řešení odezev. Nevýhodou je, že globální matice může být velice rozsáhlá a řešení pak může být v případě systému s mnoha vrstvami relativně pomalé.

V metodě globální matice reprezentuje celý systém pouze jedna matice. Globální (systémová) matice se skládá z $4\,(n-1)$ rovnic, kde n je počet vrstev. Rovnice, ve skupině po čtyřech, jsou založeny na splnění okrajových podmínek na každém rozhraní. Tedy nejsou dělány žádné apriorní předpoklady o nějakých vzájemných závislostech mezi množinami rovnic pro každé rozhraní. Řešení se provádí na celé matici, adresováním všech rovnic současně. To neznamená, že rozhraní jsou úplně nezávislá, protože rovnice na rozhraní jsou ovlivněny příchodem vln od sousedních rozhraní. Avšak, jak roste součin frekvence a tloušťky, tak se redukuje vliv nehomogenních vln putujících podél jednoho rozhraní na výchylky a napětí ve vedlejším rozhraní. Míra vlivu je určena exponenciálními členy v globální matici. Vliv těchto členů je pro nehomogenní vlny vždy slábnoucí, tedy v limitě zmizí a nehomogenní vlna putující podél jednoho rozhraní nemá vliv na vlny ve vedlejším rozhraní (tj. vrstva se chová jako poloprostor). Metoda tedy zůstává naprosto stabilní pro libovolnou velikost součinu frekvence a tloušťky, neboť se neopírá o spojování nehomogenních vln z jednoho rozhraní do druhého.

Uvažujme jedno rozhraní, např. druhé rozhraní (*i2*) na obr. 1a). Použitím vztahu (9) můžeme vyjádřit výchylky a napětí na rozhraní jako funkci vlnových amplitud na horním okraji třetí vrstvy (*l3*) nebo jako funkci vlnových amplitud na dolním okraji druhé vrstvy (*l2*). Z důvodu spojitosti výchylek a napětí na rozhraní musí dát obě vyjádření stejný výsledek. Tedy

$$[[D_{2b}]\,[-D_{3t}]]\begin{bmatrix} A_{(L+)2} \\ A_{(L-)2} \\ A_{(S+)2} \\ A_{(S-)2} \\ A_{(L+)3} \\ A_{(L-)3} \\ A_{(S+)3} \\ A_{(S-)3} \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

kde index 2 resp. 3 odkazuje na vrstvu *l2* resp. *l3* a t resp. b k hornímu resp. dolnímu okraji každé vrstvy. Tato rovnice popisuje interakci vln sousedních vrstev *l2* a *l3* na rozhraní *i2*.

Než budeme pokračovat, provedeme modifikaci prostorových počátků objemových vln, což ovlivní vztah (9). **Místo abychom definovali počátek pro všechny vlny ve vrstvě na horním okraji vrstvy, budeme definovat počátek všech vln ve vrstvě místem jejich vstupu do vrstvy.** Tedy vlny putující dolů ($L+$, $S+$) mají svůj počátek na horním okraji vrstvy a vlny putující nahoru (L-, S-) mají svůj počátek na dolním okraji vrstvy. U poloprostorů žádnou změnu neděláme. S touto modifikací a s odkazem na vztah (9) mohou být matice $[D]$ pro horní resp. dolní okraj vrstvy vyjádřeny jako:

$$[D_t] = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 g_\alpha & C_\beta & -C_\beta g_\beta \\ C_\alpha & -C_\alpha g_\alpha & -k_1 & -k_1 g_\beta \\ i\rho B & i\rho B g_\alpha & -2i\rho k_1 \beta^2 C_\beta & 2i\rho k_1 \beta^2 C_\beta g_\beta \\ 2i\rho k_1 \beta^2 C_\alpha & -2i\rho k_1 \beta^2 C_\alpha g_\alpha & i\rho B & i\rho B g_\beta \end{bmatrix}$$

resp.

$$[D_b] = \begin{bmatrix} k_1 g_\alpha & k_1 & C_\beta g_\beta & -C_\beta \\ C_\alpha g_\alpha & -C_\alpha & -k_1 g_\beta & -k_1 \\ i\rho B g_\alpha & i\rho B & -2i\rho k_1 \beta^2 C_\beta g_\beta & 2i\rho k_1 \beta^2 C_\beta \\ 2i\rho k_1 \beta^2 C_\alpha g_\alpha & -2i\rho k_1 \beta^2 C_\alpha & i\rho B g_\beta & i\rho B \end{bmatrix} \tag{16}$$

Podobná rovnice k rovnici (15) může být nyní napsána pro rozhraní *i3* a jednoduše přidána ke globální matici. Takto postupujeme i pro všechna ostatní rozhraní. Výsledkem je matice popisující $4\,(n-1)$ rovnic pro $4n$ neznámých. V případě příkladu z obr. 1a) vypadá maticová rovnice následovně:

$$\begin{bmatrix} [D_{1b}] & [-D_{2t}] & & & \\ & [D_{2b}] & [-D_{3t}] & & \\ & & [D_{3b}] & [-D_{4t}] & \\ & & & [D_{4b}] & [-D_{5t}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [A_1] \\ [A_2] \\ [A_3] \\ [A_4] \\ [A_5] \end{bmatrix} = [0] \tag{17}$$

kde vlnové amplitudy v každé vrstvě, $A_{(L+)}$, $A_{(L-)}$, $A_{(S+)}$ a $A_{(S-)}$, jsou zkráceně zapsány jako vlnový vektor vrstvy $[A]$. Čtyři vlnové amplitudy v rovnici (17) musí být nyní označeny jako známé a přesunuty na pravou stranu rovnic. Pro ultrazvukové aplikace se obvykle jako známé volí dopadající vlny v obou poloprostorech, tj. $A_{(L+)1}$, $A_{(S+)1}$, $A_{(L-)5}$ a $A_{(S-)5}$, z čehož plyne:

$$\begin{bmatrix} \left[D_{1b}^-\right] & [-D_{2t}] & & & \\ & [D_{2b}] & [-D_{3t}] & & \\ & & [D_{3b}] & [-D_{4t}] & \\ & & & [D_{4b}] & \left[-D_{5t}^+\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[A_1^-\right] \\ [A_2] \\ [A_3] \\ [A_4] \\ \left[A_5^+\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[-D_{1b}^+\right] & \\ & \\ & \\ & \left[D_{5t}^-\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[A_1^+\right] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ \left[A_5^-\right] \end{bmatrix} \tag{18}$$

kde horní index + resp. - označuje ty části matic nebo vektorů, které odpovídají + resp. - vlnám. Tedy každý z vektorů $[A^+]$ a $[A^-]$ se skládá z poloviny vektoru $[A]$ a matice $[D^+]$ a $[D^-]$ jsou submaticemi (čtyři řádky, dva sloupce) matice $[D]$. Štěpení je následující:

$$\left[A^+\right] = \begin{bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(S+)} \end{bmatrix}, \left[A^-\right] = \begin{bmatrix} A_{(L-)} \\ A_{(S-)} \end{bmatrix}, \left[D^+\right] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{13} \\ D_{21} & D_{23} \\ D_{31} & D_{33} \\ D_{41} & D_{43} \end{bmatrix}, \left[D^-\right] = \begin{bmatrix} D_{12} & D_{14} \\ D_{22} & D_{24} \\ D_{32} & D_{34} \\ D_{42} & D_{34} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Systémová matice na levé straně rovnice (18) a řídká matice na její pravé straně jsou matice čtvercové dimenze $4\,(n-1)$. Pokud jsou známé vlnové amplitudy dopadajících vln, může být pravá strana rovnice vyhodnocena okamžitě.

5 Závěr

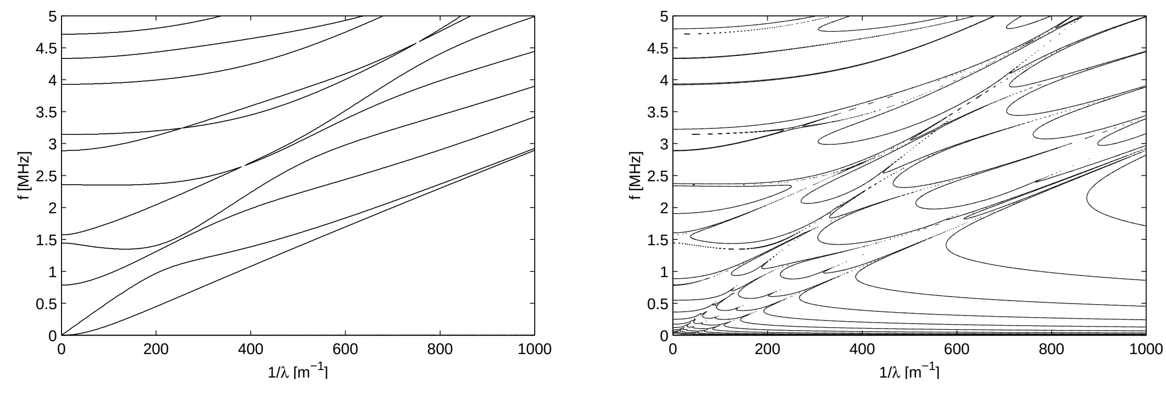
Metodou přenosové matice (TMM) a metodou globální matice (GMM) byly vypočteny disperzní křivky pro 2 mm silnou ocelovou desku umístěnou ve vakuu (vzduchu). Frekvenční rozsah byl 5 MHz a rozsah vlnového čísla byl 6000 m^{-1}.

Na obrázku 2a) je uveden výsledek výpočtu disperzních křivek metodou přenosové matice. Na obrázku jsou vyneseny vrstevnice hodnot charakteristické funkce systému. Vrstevnice jsou vyneseny pro dvě hodnoty v těsném okolí nuly, tedy tak aby odpovídaly hledaným disperzním křivkám.

Na obrázku 2b) je uveden výsledek výpočtu disperzních křivek metodou globální matice. Na obrázku jsou vyneseny vrstevnice logaritmu absolutní hodnoty charakteristické funkce systému, neboť charakteristická funkce systému je při výpočtu metodou globální matice komplexní. Hledaným disperzním křivkám odpovídají jednotlivá údolí.

Poděkování

Tato práce byla podporována Grantovou agenturou ČR prostřednictvím grantu 101/00/0674 *Vliv materiálových nelinearit a geometrických nespojitostí na šíření napěťových vln.*



(a) (b)

Obrázek 2: Disperzní křivky metodou: a) přenosové matice, b) globální matice.

References

[1] L.M. Brekhovskikh. Waves in layered media. Academic Press, New York, (1980).

[2] L. Knopoff. A matrix method for elastic wave problems. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **54**, 431–438,(1964).

[3] M.J.S. Lowe. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in mutilayered media. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency control*, **42**, 525–542, (1995).

[4] M.J.S. Lowe. Plate waves for the NDT of diffusion bonded titanium. PhD thesis, University of London, (1993).

[5] W.T. Thomson. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of Applied Physics*, **21**, 89–93, (1950).