



THE GUIDED WAVE PHENOMENA IN A PLATE AND THEIR USING IN DIAGNOSTICS

VLNOVODNÉ JEVY V DESCE A JEJICH VYUŽITÍ V DIAGNOSTICE

Petr Hora*

Abstrakt

This paper report on a technique for the analysis of propagating multimode signals. The method involves a 2-D Fourier transformation of the time history of the waves received at a series of equally spaced positions along the propagation path. The output of the transform being presented using an isometric projection which gives a 3-D view of the wave number dispersion curves. The time history of the waves was obtained by the commercial finite element (FE) code, MARC. The results of numerical studies and the dispersion curves of Lamb waves propagating in the 2.0-mm-thick steel plate are presented. The results are in good agreement with analytical predictions and show the effectiveness of using the 2-D Fourier transform method to identify and measure the amplitudes of individual Lamb modes.

Key words: guided waves, Fourier transform

Klíčová slova: vlnovodné vlny, Fourierova transformace

1 Úvod

Aplikace tradičních ultrazvukových metod, např. pulsní echo, jsou omezeny na testování relativně jednoduchých geometrií nebo podrobně zkoumají pouze oblast v bezprostředním okolí snímače. Nové ultrazvukové metody využívají pro vyšetřování konstrukčních prvků tzv. vlnovodné vlny (*guided waves*). Výhody těchto metod spočívají ve schopnosti otestovat celý konstrukční prvek jediným měřením a ve schopnosti testovat i nepřístupné oblasti složitých komponent.

*Ing. Petr Hora, CSc., Centrum diagnostiky materiálu (plzeňská pobočka Ústavu termomechaniky AV ČR), Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň, e-mail: hora@ufy.zcu.cz

Šíření *guided waves* ve složitých strukturách je komplikovaný proces, který se obtížně popisuje a interpretuje. Neustále se vyvíjí prostředky pro modelování tohoto šíření.

Jeden z přístupů k modelování šíření *guided waves* spočívá v analytickém řešení diferenciálních pohybových rovnic s příslušnými okrajovými a počátečními podmínkami. Tento postup byl již aplikován na řadě jednoduchých geometrií, s uvažováním homogenního a izotropního materiálu (viz [Gra75] a [Mik78]). Tyto rovnice se však pro komplikovanější geometrie nebo nehomogenní materiály stávají neřešitelnými.

Jiný přístup k této problematice zahrnuje numerická řešení. Existují tři hlavní numerické metody, které mohou být pro tento problém použity: metoda konečných diferencí (MKD), metoda konečných prvků (MKP) nebo metoda hraničních prvků (MHP). MKD byla první numerická metoda, která byla aplikována na studium šíření napěťových vln. MHP je výhodná v tom, že potřebuje diskretizovat pouze povrch zkoumaného vzorku; numerický problém se tím o jednu dimenzi redukuje. Naopak primární výhoda MKP spočívá v dostupnosti řady komerčních MKP programů, tedy odpadá potřeba vývoje vlastního programového kódu.

Cílem tohoto výzkumu je porovnat známé analytické řešení problému šíření *guided waves* v tlusté desce s řešením získaným numericky.

2 Numerické modelování metodou konečných prvků

Časové a prostorové rozlišení konečně-prvkového modelu je kritické pro konvergenci numerického řešení. Volba odpovídajícího integračního časového kroku, Δt , je velice důležitá pro přesnost řešení. Obecně, zmenšováním integračních časových kroků můžeme model zpřesňovat. S časovými kroky, která jsou příliš dlouhá, nejsou vysokofrekvenční složky dostatečně přesně rozlišeny. Naopak, příliš malé časové kroky jsou plýtváním výpočetního času. Nezbývá tedy nic jiného, než nalézt nějaký kompromis. Podle našich zkušeností je dostatečné volit 20 bodů na periodu nejvyšší frekvenční složky. Toto pravidlo lze vyjádřit vztahem:

$$\Delta t = \frac{1}{20f_{\max}}, \quad (1)$$

kde f_{\max} je nejvyšší frekvence, která nás zajímá. Určením nejvyšší frekvence vln šířících se strukturou a použitím vztahu (1) dostaneme časový krok, Δt , který je dostatečně malý pro modelování časového chování šíření *guided waves*. Pokud se vstupní funkce blíží skokové funkci, nemusí poměr daný vztahem (1) zajistit dostatečné časové rozlišení. V některých případech musí být tento poměr zvýšen až na desetinásobek. Potřebný časový krok může být také odvozen z času, který potřebuje nejrychlejší vlna na překonání vzdálenosti dvou nejbližších bodů sítě.

Velikost prvků se volí takovým způsobem, aby se zachovalo prostorové rozlišení šířících se vln. Ze zkušenosti lze říci, že je potřeba uvažovat alespoň 20 bodů na nejkratší vlnovou délku. Toto pravidlo lze vyjádřit vztahem:

$$l_e = \frac{\lambda_{\min}}{20}, \quad (2)$$

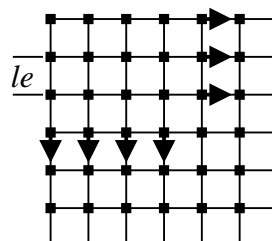
kde l_e je délka prvku a λ_{\min} je nejkratší vlnová délka, která nás zajímá. Pokud jsou zapotřebí vysoce přesné numerické výsledky, nemusí být vztah (2) dostatečný a je třeba uvažovat vyšší úroveň diskretizace.

Ze vztahů (1) a (2) vyplývá, že problémy vysokofrekvenčního vlnového šíření vyžadují enormní výpočetní zdroje. Výpočty těchto problémů vedou na vysoké hodnoty f_{\max} a malé hodnoty λ_{\min} , což znamená velice hustou síť a velmi malý integrační časový krok.

Abychom pochopili chování MKP aplikované na řešení problému *guided waves*, uvažovali jsme relativně jednoduchou geometrii: 2 mm silnou a 100 mm dlouhou ocelovou desku, jaká byla použita v [MJQ99]. Pro tuto geometrii existuje známé analytické řešení (Rayleigh-Lambova rovnice, viz následující kapitola). MKP program používaný pro tuto práci byl MARC ver. K7.3.2 s pre- a post-procesorem MENTAT ver. 3.2.0, který byl instalován na pracovní stanici SGI OCTANE (procesor R 10000, 195 MHz, 256 MB RAM, 4+9 GB HD). Geometrické a materiálové vlastnosti konečně-prvkového modelu jsou uvedeny v tabulce 1. Horní levý roh desky, která je modelována čtvercovými prvky ($l_e = 0.1$ mm), je zatížen výchylkou v x -ovém a y -ovém směru. Obrázek 1 znázorňuje aplikované výchylky v různých uzlech horního levého rohu desky. Časový průběh těchto výchylek je trojúhelníkový puls se šířkou $0.2 \mu\text{s}$. Způsob zatížení nemá žádný praktický význam, jde jen o to, aby se vybudily vysokofrekvenční vlny. Cílem tohoto modelu je ukázat disperzní jevy až do frekvence, f , 5 MHz. Podle výše uvedených doporučení je tento transientní problém řešen s integračním časovým krokem, $\Delta t = 10^{-8}$ s. Při MKP řešení bylo použito metody centrálních diferencí.

Geometrické vlastnosti		Materiálové vlastnosti	
Šířka	2 [mm]	Youngův modul	$2 \cdot 10^{11}$ [Pa]
Délka	100 [mm]	Poissonovo číslo	0.29 [-]
Typ prvku	4-uzlový	Hustota	7850 [kg/m ³]
Velikost prvku	0.1 [mm]	Rychlost dilatační vlny	5778 [m/s]
Počet prvků	20000 [-]	Rychlost smykové vlny	3142 [m/s]
Počet uzlů	21021 [-]	Rychlost Rayleighovy vlny	2909 [m/s]

Tabulka 1: MKP model a materiálové vlastnosti



Obrázek 1: Aplikované zatížení.

3 Disperzní křivky

V následující analýze se předpokládá lineární (elastický), isotropní, homogenní, nepiezoelektrický a neabsorbující materiál. Uvažujme harmonickou vlnu šířící se deskou; souřadnicový systém viz obrázek 2; výchylka na povrchu, $\mathbf{u}(x, t)$, může být popsána obecným analytickým výrazem (viz Brekhovskikh [Bre60]) jako,

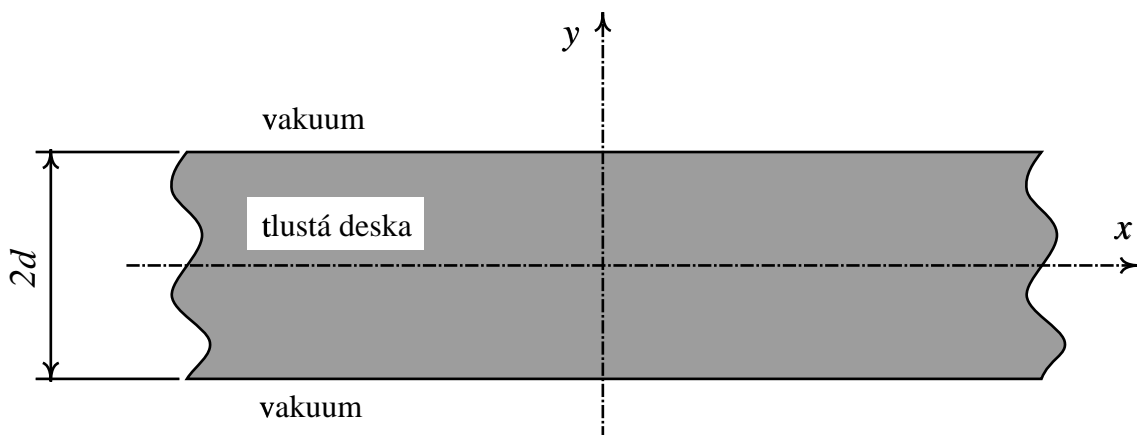
$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{A}(\omega) e^{i(\omega t - kx - \theta)}, \quad (3)$$

kde $\mathbf{A}(\omega)$ je frekvenčně závislá amplitudová konstanta, $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence, vlnové číslo $k = \omega/c$, c je fázová rychlost a θ označuje fázi.

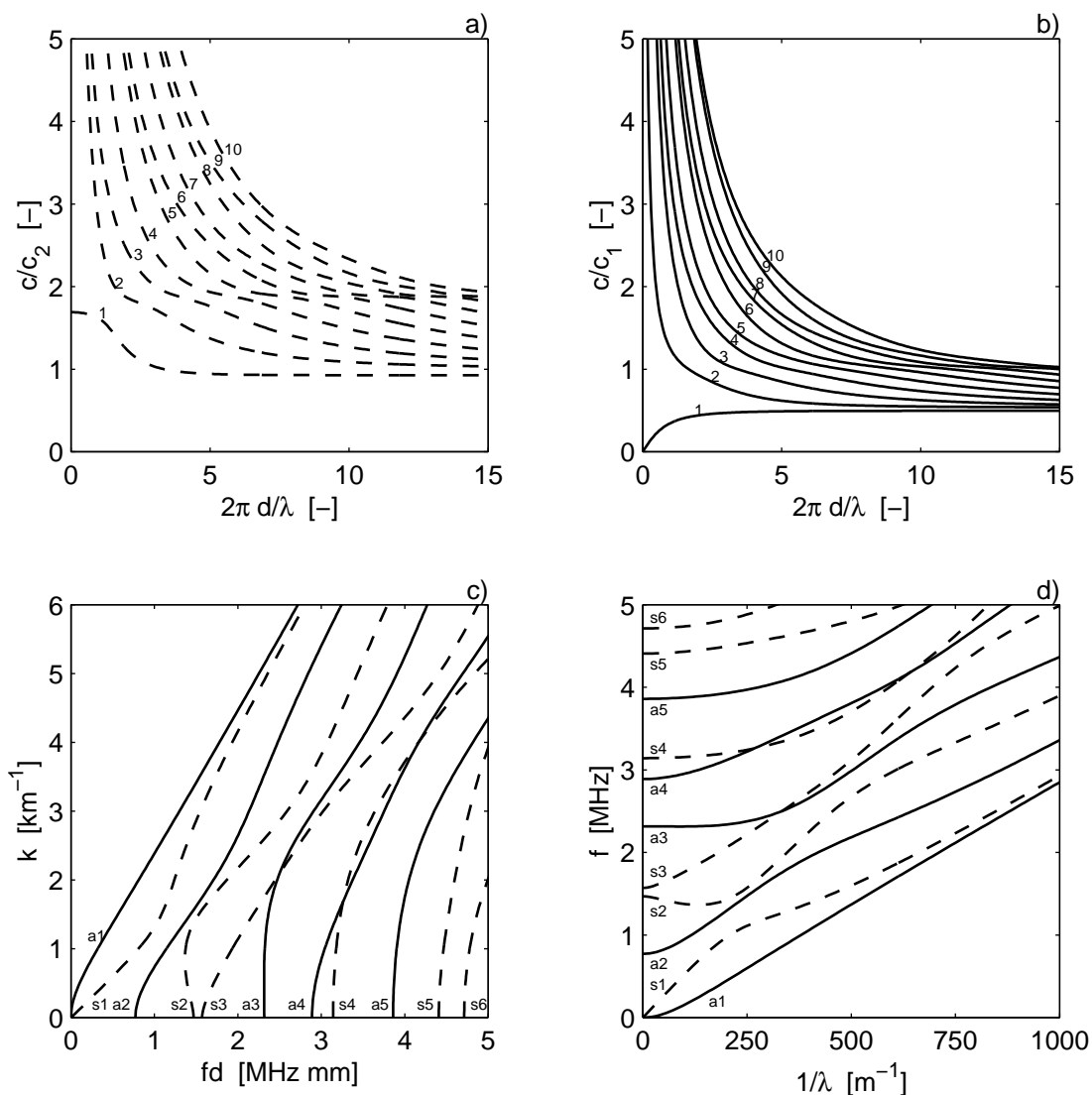
Lambovy vlny jsou dvojrozměrné šířící se vibrace ve volných deskách. Jejich výchylky mohou být symetrické (symetrické módy) nebo antisymetrické (antisymetrické módy) vzhledem ke střední rovině desky. Rychlosti všech Lambových vln jsou disperzní a v desce tloušťky $2d$ bude pro frekvenci f existovat konečný počet módů šíření, které mohou být určeny z počtu reálných kořenů Rayleigh-Lambovy rovnice. Fázové rychlosti Lambových vln jako funkce vlnového čísla mohou být získány řešením následujících transcendentálních rovnic:

$$\frac{\tan \frac{2\pi}{\lambda} d \sqrt{(c/c_2)^2 - 1}}{\tan \frac{2\pi}{\lambda} d \sqrt{(c/c_1)^2 - 1}} + \left(4 \frac{\sqrt{[(c/c_1)^2 - 1][(c/c_2)^2 - 1]}}{[2 - (c/c_2)^2]^2} \right)^{\pm 1} = 0. \quad (4)$$

Znaménko + resp. - se vztahuje k symetrickým resp. antisymetrickým Lambovým vlnám. c_1 resp. c_2 je rychlost dilatační resp. příčné vlny. Grupová rychlost, $c_g = \partial\omega/\partial k$, může být vypočtena jakmile je známa fázová rychlost jako funkce vlnové délky. Obrázek 3 znázorňuje prvních deset disperzních křivek jak pro symetrické, tak pro antisymetrické Lambovy vlny. Obrázky 3a) a b) znázorňují disperzní křivky vypočtené podle vztahu (4). Obrázky 3c) a d) znázorňují disperzní křivky Lambových vln šířících se v 2.0 mm silné ocelové desce, kde $c_1 = 5778$ m/s a $c_2 = 3142$ m/s.



Obrázek 2: Schématická reprezentace geometrie desky a použitého souřadnicového systému.



Obrázek 3: Disperzní křivky Lambových vln.

4 Dvozměrná spektrální metoda

Klíčový problém týkající se kvantitativního měření charakteristik šíření Lambových vln spočívá ve skutečnosti, že pro libovolnou frekvenci může existovat více módů šíření. Dvozměrná FFT metoda popsaná v [AC91] je rozšířením jednorozměrné spektrální metody vyvinuté Sachsem a Paoem [SP78] pro měření rychlosti napětových vln.

Šířící se Lambovy vlny jsou harmonické jak ve frekvenční, tak v prostorové oblasti, jak lze nahlédnout ze vztahu (3). Provedením časové Fourierovy transformace přejdeme z časové do frekvenční oblasti. Následným provedením prostorové Fourierovy transformace přejdeme do oblasti frekvence-vlnové číslo, kde lze měřit amplitudy a vlnová čísla jednotlivých módů.

Dvozměrná Fourierova transformace vztahu (3) je dána vztahem

$$H(k, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i(kx + \omega t)} dx dt . \quad (5)$$

Jelikož vypočtené i naměřené výchylky budou dány v diskretních bodech, použijeme diskretní Fourierovu transformaci. Diskretní dvojrozměrná Fourierova transformace může být definována podobným způsobem jako jednorozměrná DFT. Výsledkem této transformace bude dvojrozměrné pole amplitud v diskretních frekvencích a vlnových číslech. Jako v jednorozměrném případě musí být odstraněn *aliasing* vzorkováním dat dostatečně vysokou frekvencí v časové oblasti i v oblasti vlnových čísel. Jelikož signály nebudou obvykle periodické vzhledem k časovému a prostorovému vzorkovacímu okénku, objeví se rozptyly, které mohou být redukovány okénkovými funkcemi, např. Hannovo okénko. K přesnějšímu určení frekvence a vlnového čísla maximálních amplitud mohou být za konce signálů doplněny nuly.

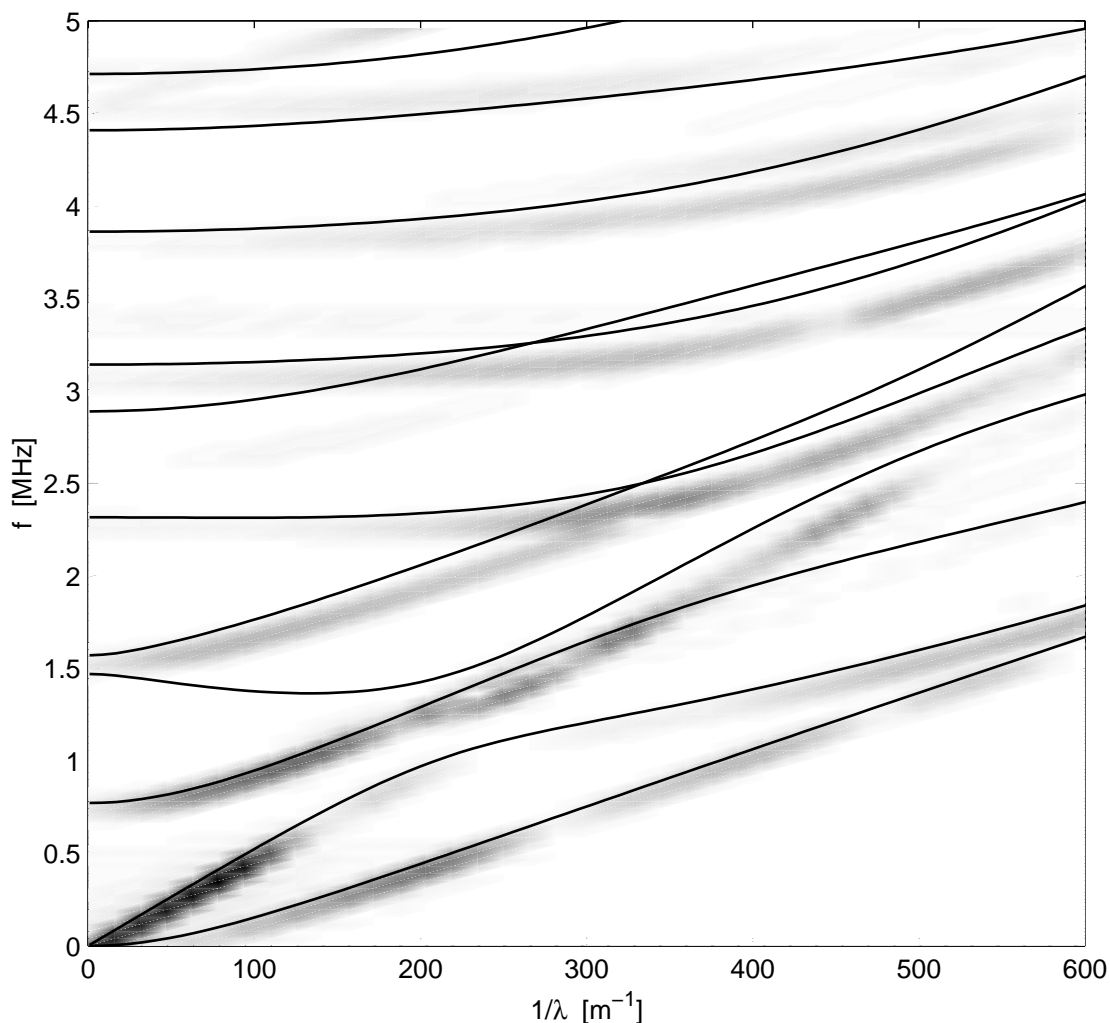
Algoritmus:

1. Vytvoří se pole (sloupcově) z experimentálně nebo numericky získaných časových historií výchylek sejmутých z řady ekvidistantně rozmístěných bodů podél cesty šíření.
2. Proveďte se časová Fourierova transformace každého sloupce pole, čímž se získá frekvenční spektrum pro každou časovou historii.
3. Proveďte se prostorová Fourierova transformace každého řádku (nyní sestaveného ze složek stejné frekvence), čímž se získá informace o amplitudách nad oblastí frekvence-vlnové číslo.

Pro demonstraci 2D-FFT budeme uvažovat pouze x -ové výchylky v uzlech na horním povrchu desky. Aby se odstranil *aliasing* pro uvažovaný rozsah vlnových čísel a frekvencí, musí být časová i prostorová vzorkovací rychlost pro 2D-FFT vybrána dosti vysoká. Poněvadž uvažovaná horní frekvenční mez je 5 MHz, je použita vzorkovací rychlost $\Delta T = 10^{-7}$ s. Z pohledu MKP vedou prvky délky $l_e = 0.1$ mm k přesným výsledkům pro $\lambda > \lambda_{\min} = 2$ mm [viz vztah (2)]. Z toho plyne maximální hodnota pro $1/\lambda = 500$ m⁻¹. Proto je použit prostorový vzorkovací krok $\Delta x = 0.5$ mm. To znamená, že pro 2D-FFT jsou zapotřebí pouze řešení z každého pátého bodu na povrchu desky a to pro každý desátý časový krok. Abychom dostali signál bez odrazů od pravého konce desky, ořízneme časový signál Hannovo okénkem o šířce 17 μ s, což odpovídá času, který potřebuje dilatační vlna k dostižení pravého okraje desky. Řešení pro časy větší než 17 μ s jsou ignorována a nahrazena nulami pro zvýšení frekvenčního rozlišení časové FFT.

Obrázek 4 znázorňuje pseudobarevný graf amplitud nad oblastí frekvence-vlnové číslo. Z obrázku je zřejmé, že významnější amplitudy jsou pouze pro jisté kombinace vlnového čísla a frekvence; tyto hodnoty jsou řešením vztahu (4). Přesná řešení vztahu (4) jsou do obrázku zakreslena plnými čarami. Povšimněte si, že existují také nějaké rušivé špičky vyvolané chybami vzorkování a chybami numerickými.

Pro tento MKP model je doporučeného poměru $\lambda/l_e = 20$ dosaženo pro $1/\lambda = 500$ m⁻¹. Skutečnost, že existuje dobrá shoda i pro vyšší hodnoty $1/\lambda$, vede k závěru, že toto omezení vlnové délky není tak kritické. Avšak poměr mezi integračním časovým krokem Δt a frekvencí f_{\max} je mnohem kritičtější; numerická řešení se zhoršují, jak se poměr $1/(\Delta t f_{\max})$ blíží k doporučené hodnotě 20. Závěrem lze konstatovat, že tento model desky prokázal použitelnost komerčního MKP systému pro modelování disperzní povahy *guided waves*.



Obrázek 4: Pseudobarevný graf spektra $1/\lambda - f$.

5 Závěr

Tento výzkum jasně ilustruje efektivnost použití MKP pro modelování šíření dvojrozměrných *guided waves*. Výzkum stanovuje základní mechanismy pro numerická výpočty šíření *guided waves* ve složitých konstrukčních prvcích a užívá výkonných pre- a post-procesorových schopností komerčních MKP systémů ke studiu a interpretaci jevu šíření *guided waves*.

Průzkum vlivu dvou nejdůležitějších parametrů MKP, hustota sítě (velikost prvku) a velikost časového kroku mezi body řešení (integrační časový krok), je studován na problému, u kterého je známo analytické řešení (tlustá deska). MKP řešení konverguje pro jisté hodnoty velikosti prvku a integračního časového kroku. Tato optimalizace je důležitá pro odstranění zbytečně vysokých hardwarových požadavků a enormních celkových výpočetních časů. Nejvyšší frekvence vlny má vliv na integrační časový krok, zatímco nejkratší vlnová délka ovlivňuje velikost prvku. Numerické výsledky jsou v naprosté shodě s analytickým řešením.

Další výhodou MKP modelu je skutečnost, že numerické výsledky mohou být elegantně prezentovány použitím vestavěných post-procesorových schopností. Např. snímek rozložení

výchylek nebo barevný graf napěťového pole mohou poskytnout nový pohled na jev šíření vln.

Poděkování

Tato práce byla částečně podporována Grantovou agenturou ČR (číslo grantu: 101/00/0674) a Ústavem termomechaniky (projekt číslo: PP4/76U).

Reference

- [AC91] D. Alleyne and P. Cawley. A two-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(3):1159–1168, March 1991.
- [Bre60] L. M. Brekhovskikh. *Waves in layered media*. Academic, New York, 1960.
- [Gra75] K. F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. New York: Dover, 1975.
- [Mik78] J. Miklowitz. *The theory of elastic waves and waveguides*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.
- [MJQ99] F. Moser, L. J. Jacobs, and J. Qu. Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method. *NDT&E International*, 32:225–234, 1999.
- [SP78] W. Sachse and Y-H. Pao. On determination of phase and group velocities of dispersive waves in solids. *J. Appl. Phys.*, 49:4320–4327, 1978.