



České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická  
katedra radioelektroniky

## KALIBRACE SNÍMAČŮ AKUSTICKÉ EMISE IMPULSNÍ METODOU

Kandidátská disertační práce

Školitel:  
Prof. Ing. Zdeněk ŠKVOR, DrSc.

Disertant:  
Ing. Petr HORA

Praha, srpen 1990

Obsahem práce jsou výsledky získané na katedře radioelektroniky FEL - ČVUT během interní vědecké aspirantury v letech 1986 - 1990. Práce vznikla na základě řešení úkolu SPZV č. I-4-6/02 "Nové principy přeměn a záznamu akustického signálu".

Za cenné rady a pomoc při zpracování zvolené problematiky děkuji svému školiteli prof. Ing. Z. Škvorovi, DrSc. a doc. Ing. R. Breptovi, DrSc. z Ústavu termomechaniky ČSAV v Praze. Za poskytnutí kónického snímače akustické emise děkuji Ing. M. Kobernovi z Ústavu technologie a spolehlivosti strojních konstrukcí ČSAV v Plzni. Za urychlené zhotovení speciálních křemenných kapilár děkuji Ing. J. Zátorskému z Ústavu chemie skelných a keramických materiálů ČSAV v Praze Suchdole. Za pomoc při návrhu a realizaci měřiče síly s tenzometry děkuji doc. Ing. S. Holému, CSc. z FSI-ČVUT a Ing. L. Hrubantovi a panu Karlu Kozákovi z VZLÚ v Praze Letňanech. Dále děkuji Ing. L. Ruffrovi, CSc. a paní Jitce Remkové z katedry radioelektroniky FEL-ČVUT za pomoc při přípravě a realizaci praktických měření. Nakonec bych rád poděkoval i Ing. J. Hozmanovi za vyhotovení fotografické dokumentace měřicí aparatury.

## O B S A H

Seznam použitých symbolů .....	4
I. Současný stav problematiky	
a vybraný přehled literatury .....	7
II. Cíl disertační práce .....	11
III. Zvolené metody zpracování .....	12
1. Výchytky na povrchu poloprostoru .....	13
1.1 Zobecněný Lambův problém .....	13
1.1.1 Stanovení problému .....	15
1.1.2 Symbolika .....	16
1.1.3 Vlnová rovnice pro neohraničené prostředí .	19
1.1.4 Okrajové podmínky .....	19
1.1.5 Zvláštní případ; druhé prostředí je vakuum .....	20
1.2 Příklad povrchového buzení skokovou funkcí síly .....	25
1.3 Příklad podpovrchového buzení skokovou funkcí síly .....	39
1.3.1 Aproximace řešení pro $r \ll h/\sqrt{2}$ .....	49
1.4 Transformační tabulka .....	55
2. Kalibrace snímačů akustické emise .....	58
2.1 Přehled kalibračních metod snímačů akustické emise .....	58
2.2 Impulsní metoda .....	59
2.3 Kónický snímač .....	63
2.4 Měřicí aparatura .....	76
2.5 Přehled výsledků .....	88
IV. Výsledky práce, nové poznatky .....	92
V. Závěry pro praxi a další rozvoj vědní disciplíny ...	93
Seznam použité literatury .....	94

## Seznam použitých symbolů

$a$	- poloměr
$a_i$	- koeficient polynomu
$a_1, a_2$	- poloměry kónického vlnovodu
$c$	- fázová rychlost
$c_R$	- rychlost Rayleighových vln
$c_0$	- rychlost podélné vlny v tenké tyči
$c_1$	- rychlost dilatační vlny v neomezeném třírozměrném prostředí
$c_2$	- rychlost příčné vlny
$g_{33}$	- piezoelektrická konstanta
$h$	- hloubka zdroje pod povrchem
$h_{33}$	- piezoelektrická konstanta
$i$	- imaginární jednotka; přirozené číslo
$j$	- imaginární jednotka
$k$	- vlnové číslo
$k_b$	- transformační poměr
$l$	- délka
$\mathbf{l}$	- vektor posuvu
$l_r$	\
$l_\varphi$	- složky vektoru posuvu
$l_z$	/
$n$	- přirozené číslo
$q$	- konstanta
$r, \varphi, z$	- cylindrické souřadnice
$r$	- poloměr; poměr poloměrů kónického vlnovodu
$s$	- reciproká hodnota rychlosti příčné vlny
$s_{33}^D$	- konstanta poddajnosti při $D=0$
$t$	- čas
$v$	- rychlost
$x, y, z$	- kartézské souřadnice
$x$	- nezávisle proměnná
$x_1, x_2$	- parametry kónického vlnovodu

A, B	- konstanty
$A(\tau)$	- transformační faktor
$B(\tau)$	- transformační faktor
$C_0$	- kapacita snímače
F	- síla
$F(t)$	- budící síla
K, L	- konstanty
$L_z(\tau)$	- normovaná axiální složka vektoru posuvu
$P(x)$	- polynom
R	- radius vektor
S	- reciproká hodnota fázové rychlosti dilatační vlny v neomezeném třírozměrném prostředí; plocha průřezu vlnovodu
$S_R$	- reciproká hodnota rychlosti Rayleighovy vlny
$S_1, S_2$	- plochy podstav kónického vlnovodu
U	- skalární potenciál; elektrické napětí
Z	- celková síla působící v místě zdroje
$\alpha$	- úhel; konstanta
$\beta$	- konstanta
$\gamma$	- rychlostní poměr $c_2/c_R$
$\delta$	- rychlostní poměr $c_1/c_2$
$\varphi$	- úhel
$\lambda$	- Laméova konstanta; vlnová délka
$\mu$	- Laméova konstanta
$\xi$	- výchylka
$\rho$	- hustota
$\sigma$	- Poissonovo číslo
$\sigma_r$	\
$\sigma_\varphi$	- normálová napětí
$\sigma_z$	/
$\tau$	- čas; bezrozměrný čas
$\tau_{r\varphi}$	\
$\tau_{rz}$	- smyková napětí
$\tau_{z\varphi}$	/
$\omega$	- úhlová frekvence

- $\Delta$  - relativní odchylka
- $\phi$  - úhel
- $\psi$  - vektorový potenciál; úhel
- $\Xi$  - objemová dilatace; úhel
- $1(t)$  - Heavisideova skoková funkce
- $*$  - operátor konvoluce
- $\cdot$  - tečka nad symbolem označuje derivaci podle času

V práci je použito anglosaského značení Laméových konstant ( $\lambda$  a  $\mu$ ). Pro Poissonovo číslo se používá symbolu  $\sigma$ , které je, aby nedošlo k záměně se symboly pro mechanické napětí, vždy bez indexů.

Má-li symbol více významů, je jeho lokální význam podrobně vysvětlen v příslušné podkapitole, kde se používá.

Ostatní symboly potřebné jen v jedné kapitole jsou vysvětleny v jejím úvodu.

## I. Současný stav problematiky a vybraný přehled literatury

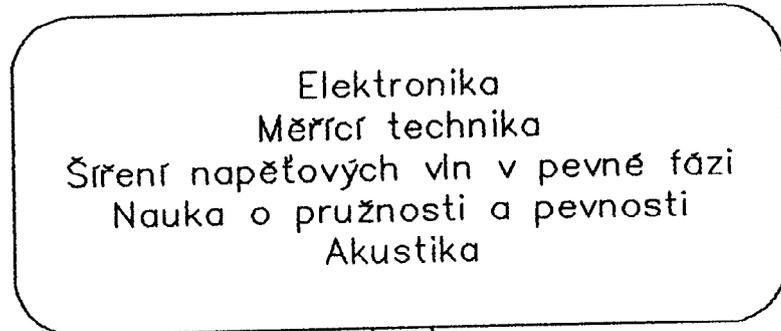
Akustická emise je jev související se vznikem a vysíláním elastických vln převážně v pevných látkách, které je vyvoláno náhlým uvolněním energie v materiálu. K uvolňování energie dochází při přeměně potenciální energie čerpané z vnějších nebo vnitřních sil na energii kinetickou, neboli z deformace v prvním a z pnutí v druhém případě.

Při širším pojetí této definice lze do oblasti akustické emise počítat i zvukové projevy doprovázející mezní deformace některých látek, např. praskání ledu, skla, hornin, vláknitých materiálů, zvonění cínu při plastické deformaci apod.

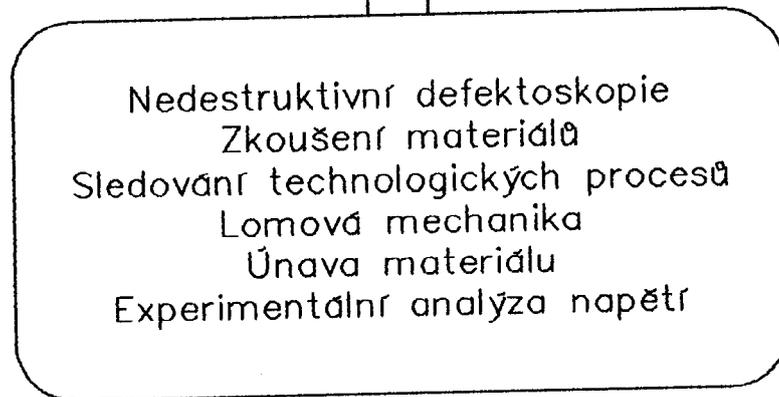
V současné době se však pod pojmem akustická emise zpravidla rozumějí mechanické vlny v ultrazvukovém pásmu tj. nad 20 kHz. V této oblasti leží frekvence akustických vln spojených s vnitřními procesy v pevných látkách, které jsou důležité z hlediska moderní nauky o materiálu.

V tomto smyslu se považuje za zakladatele celého oboru Joseph Kaiser, který v roce 1950 poprvé identifikoval mechanické vlny při plastické deformaci a prokázal nevratnost tohoto procesu (Kaiserův jev - výskyt emisních signálů až po překročení předchozí úrovně stimulace). Po delší stagnaci využití akustické emise lze za další mezník považovat rok 1964, kdy došlo v USA k první aplikaci, při níž byly potlačeny nízké frekvence a tudíž i odstraněn nežadoucí vliv mechanického šumu z okolí. Od té doby lze datovat bouřlivý rozvoj elektronických aparatur splňujících různé požadavky na snímání a zpracování signálů akustické emise. V současné době si akustická emise jako typicky mezivědní disciplína našla pevné místo v řadě oborů, zejména v nedestruktivní defektoskopii a fyzikální metalurgii (viz následující tabulka).

## Zdrojové obory



AKUSTICKÁ EMISE



Aplikační obory v oblasti mechaniky  
pevných látek

Hlavní aplikační obory akustické emise  
a její interdisciplinární charakter

Metoda akustické emise představuje jeden z nejprogresivnějších postupů nedestruktivního zkoušení materiálů. Naprostá většina používaných nedestruktivních metod je založena na interakci defektu s orientovaným tokem energie, např. energie ultrazvukových vln,  $\gamma$ -záření apod. Naproti tomu metoda akustické emise je založena na interakci



defektů s mechanickým napětím působícím uvnitř daného útvaru. Defekt hraje při akustické emisi mnohem aktivnější úlohu než při jiných nedestruktivních metodách. Metoda akustické emise má tyto hlavní přednosti [5]:

- a) zdrojem signálu akustické emise jsou jen ty defekty, které jsou pro danou velikost mechanického napětí nestabilní a tudíž pro celistvost konstrukce nejvíce nebezpečné;
- b) není nutné mít předběžné znalosti o výskytu defektu a jeho přibližné poloze.

Je možno detekovat poruchy řádově  $10^9$  menší než např. při ultrazvukových testech. Tyto výhody jsou však doprovázeny řadou dosud ne zcela uspokojivě zvládnutých problémů spojených s detekcí, registrací a interpretací signálů akustické emise.

Z úvah o charakteru uvolňovaných impulsů akustické emise od jednotlivých zdrojů - viz např. [10] je zřejmé, že dané signály pokrývají široký frekvenční interval; podle současných poznatků od 20 kHz do 2 MHz. Tyto impulsy se šíří v tělesech konečných rozměrů, takže registrované údaje jsou kromě disperze ovlivněny i následkem řady vnitřních odrazů. K dalšímu zkreslení dochází ještě vlivem nelinearity frekvenční charakteristiky snímače. Zejména z tohoto důvodu vyvstává naléhavá potřeba kalibrace snímačů akustické emise pro objektivní vyhodnocení jak vlastních měření, tak zejména pro porovnání výsledků z různých pracovišť, kde se kromě toho užívá často různých aparatur.

Zvláště výrazně se nutnost kalibrace uplatňuje u technicky nejatraktivnější aplikace metody akustické emise, tj. při lokalizaci zdrojů akustické emise. V tomto případě je nezbytné, aby všechny snímače téhož měřicího systému měly shodnou citlivost a frekvenční charakteristiku.

V současnosti se používají následující kalibrační metody: vibrační metoda [21] (slouží zejména pro kalibraci akcelerometrů), impulsní metoda [2,3] (umožňuje i absolutní

kalibraci; podrobný popis této metody je uveden v kapitole 2.2.), hydrofonní metoda [5] (cejchování se provádí ve velké nádrži s vodou, kde na jedné straně je umístěn standardní vysílač a na druhé straně standardní snímač. Po proměření přenosu v celém frekvenčním pásmu je namísto standardu umístěn měřený snímač.), ultrazvuková metoda [5] (vysílač je prostřednictvím viskózního média přímo akusticky spojen se snímačem. Vysílač je buzen sinusovým generátorem, přeladovaným v měřeném frekvenčním pásmu.), metoda náhodného šumu [5] (tato metoda se snaží modelovat signál akustické emise a reálné podmínky jeho šíření a snímání), metoda jiskrové kalibrace [5] (krátké napěťové impulsy jsou vyvolány tlakovou vlnou vznikající při výboji ve vzduchovém jiskřišti. Za předpokladu, že povrchové vlny přicházející na snímač obsahují všechny frekvenční složky se stejnou amplitudou, lze zařazením úzkopásmového filtru na výstupu snímače změřit amplitudy těchto složek a tím získat jeho frekvenční charakteristiku.).

V této práci je věnována pozornost impulsní metodě kalibrace snímačů, neboť se jeví z hlediska akustické emise jako nejvýhodnější.

Jelikož je třeba u impulsní metody kalibrace znát časové průběhy vertikální výchylky na povrchu poloprostoru při povrchovém i podpovrchovém buzení, byla věnována pozornost též výpočtu těchto průběhů.

## II. Cíl disertační práce

Cílem teoretické části práce (kap. 1) je provést na základě známých řešení [6] numerické výpočty časových průběhů vertikální složky výchylky na povrchu poloprostoru při povrchovém i podpovrchovém buzení skokovou funkcí síly. Dalším cílem teoretické části práce je nalézt dostatečně přesnou aproximaci průběhu vertikální složky výchylky na povrchu poloprostoru pro případ podpovrchového buzení skokovou funkcí síly. Realizace tohoto záměru umožní vyhnout se při praktických výpočtech řešení složitých komplexních integrálů, které časové průběhy výchylek popisují.

Cílem praktické části práce je provést kalibraci snímače akustické emise impulsní metodou. Pro dosažení tohoto cíle bude třeba zkonstruovat zařízení pro kalibraci a zhotovit standardní snímač akustické emise.

### III. Zvolené metody zpracování

Práce je rozdělena na dvě části. V první části jsou ve stručné formě probrány metody výpočtu výchylky (popřípadě jiné veličiny) na povrchu poloprostoru. Postupně je probráno řešení zobecněného Lambova problému, proveden numerický výpočet axiální složky vektoru posuvu na povrchu poloprostoru v případě povrchového i podpovrchového buzení skokovou funkcí síly a uvedena transformační tabulka pro výpočet rychlosti a zrychlení v případech, kdy není použito budící síly ve tvaru skokové funkce. Dále je v první části nalezena dostatečně přesná aproximace průběhu vertikální složky výchylky na povrchu poloprostoru pro případ podpovrchového buzení skokovou funkcí síly, což podstatně urychlí výpočet tohoto průběhu.

Ve druhé části práce je uveden přehled současných kalibračních metod a podrobně je popsána impulsní kalibrační metoda. Podrobně je též popsána konstrukce kónického snímače, který slouží jako standard, a konstrukce kalibračního zařízení. Dále je ve druhé části práce též uvedena i zevrubná analýza cylindrického a kónického snímače. V závěru druhé části je přehled výsledků kalibrace standardních snímačů akustické emise impulsní metodou.

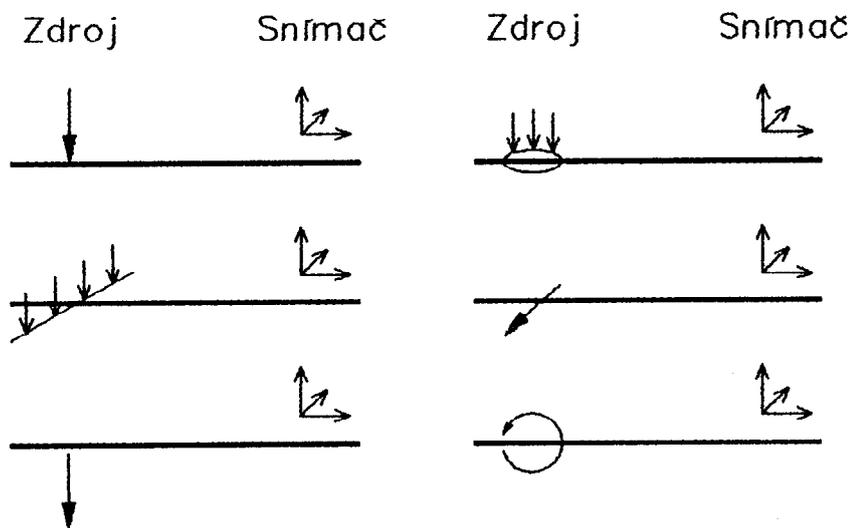
## 1. Výchyly na povrchu poloprostoru

V této kapitole budou probrány metody výpočtu výchyly (popřípadě jiných veličin) na povrchu poloprostoru. V podkapitole 1.1 bude nastíněno řešení zobecněného Lambova problému, v podkapitole 1.2 bude proveden numerický výpočet axiální složky vektoru posuvu na povrchu poloprostoru v případě povrchového buzení skokovou funkcí síly a v podkapitole 1.3 bude uveden numerický výpočet axiální složky vektoru posuvu na povrchu poloprostoru v případě podpovrchového buzení skokovou funkcí síly. V podkapitole 1.4 bude pro úplnost uvedena transformační tabulka pro výpočet rychlosti a zrychlení v případech, kdy je použito budící síly ve tvaru skokové funkce, impulsní funkce nebo budící síly o libovolném průběhu. Výsledky získané v kap. 1 budou využity v kap. 2 "Kalibrace snímačů akustické emise", kde se jich používá při impulsní metodě kalibrace.

### 1.1 Zobecněný Lambův problém

Uvažujme následující problém: dvě homogenní, isotropní, dokonale elastická polonekonečná prostředí s rovinnými čely, které jsou v dokonale pevném spojení. V jednom z prostředí se nachází zdroj, který emituje sférickou, postupnou, isotropní, tlakovou elastickou vlnu. Hledáme časovou závislost výchylek v libovolném bodě obou prostředí a zvláště popis jevů, které souvisejí s vlivem rovinného rozhraní na dopadající sférickou elastickou vlnu. Tuto úlohu budeme nazývat zobecněný Lambův problém.

Název Lambův problém se používá u řady problémů šíření elastických vln. Jejich rozdílné vlastnosti spočívají v hledání dynamické odezvy elastického poloprostoru při působení koncentrované časově závislé síly. Tab.1.1 znázorňuje parametry problému. Obr.1.1 ilustruje některé možnosti vyskytující se v literatuře, které jsou dány různými parametry zdrojů.



Obr. 1.1 Typy Lambova problému

Zdroj:	
a) umístění	- na povrchu - pod povrchem
b) rozprostření	- bod - přímka
c) orientace	- vektor torzního momentu
d) časový průběh	- $f(t)$
Snímač:	
a) orientace	- vertikální - radiálně horizontální - transverzálně horizontální
b) měřená veličina	- výchylka - rychlost - zrychlení
Prostředí:	
a) Laméovy konstanty ( $\lambda, \mu$ )	
b) Poissonovo číslo ( $\sigma$ )	

Tab. 1.1 Parametry Lambova problému

Původní problém popsany Lambem v roce 1904 se odlišuje od výše uvedené úlohy v následujících rysech:

1. Jedním z prostředí u Lamba bylo vakuum.
2. Zdroj byl u Lamba umístěn na povrchu.
3. Lamb studoval výchylky pouze na povrchu.

Lambova řešení byla přepracována a rozšířena mnoha autory. Přehled těchto úprav je stručně uveden v [13]:

Řešení povrchového přímkového zdroje včetně tangenciální síly bylo zpracováno Sauterem (1950), Sherwoodem (1958) a Graggsem (1960).

Řešení v uzavřeném tvaru popsal Pekeris (1955) pro vertikální bodový zdroj na povrchu. Miller a Pursey (1955) získali výsledky pro vzdálené pole pro bodový povrchový zdroj konečného poloměru. Tangenciální bodová síla na povrchu byla zkoumána Chaem (1960) a Cherrym (1962), a koncentrovaná vertikální síla v hloubce Pinneyem (1954), Pekerisem (1955) a Pekerisem a Lifsonem (1957). Pozdější články potvrdily povrchově lomené PS pulsy pro podpovrchový bodový zdroj navržené původně Nakanem (1925).

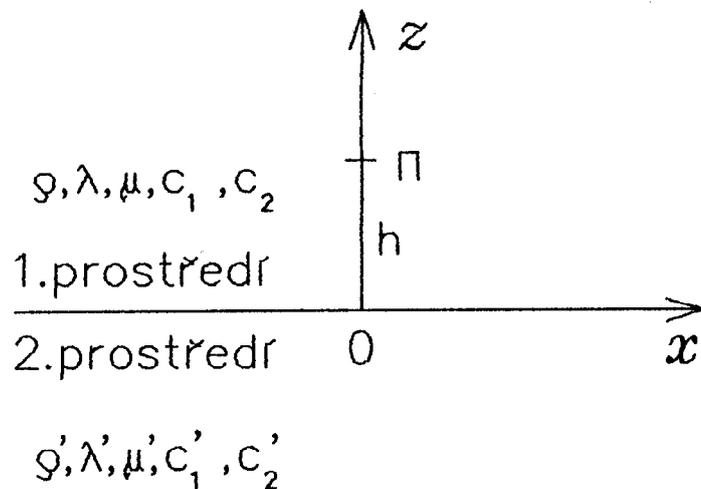
Vlnové systémy vyvolané pohybujičím se povrchovým zdrojem byly popsány Lambem (1916), Sneddonem (1952), Colem a Huthem (1958) a Angem (1960). Vliv frekvenčně závislého útlumu na puls byl uvažován Newlandsem (1952) a Knopoffem (1959).

Alternativní hledisko se zaobírá reaktivním vlivem na vibrující zdroj, vyvolaný elastickým poloprostorem. Miller a Pursey (1954) vypočítali výsledky ve tvaru vyzařovací impedance. Heidrich a Just (1960) vyhodnotili vliv zatížení na měření. Awojobi a Grootenhuis (1965) ukázali, jak by se daly z měření amplitudy vibrací a frekvence zatěžování vypočítat hodnoty Poissonova čísla a příčného modulu pro poloprostor.

#### 1.1.1 Stanovení problému

Provedme nyní podrobnou specifikaci problému. Zvolme

jako rozhraní oddělující dvě polonekonečná, homogenní, isotropní a dokonale elastické prostředí rovinu  $xy$  ( $z = 0$ ) v kartézském souřadnicovém systému  $x, y, z$  (obr. 1.2).



Obr. 1.2 Souřadnicový systém s vyznačeným zdrojem  $\Pi$  a hraniční rovinou  $z = 0$ .

Předpokládáme dokonale pevné spojení dvou prostředí v rovině  $z = 0$ .

V čase  $t = 0$  jsou obě prostředí v klidu a bodový zdroj  $\Pi$ , jehož souřadnice jsou  $0, 0, h > 0$ , začíná vibrovat; jeho pohyb je pulsující radiální. Takový zdroj obvykle představuje koule o libovolně malém poloměru a jeho pohyb je dán libovolnou časovou závislostí.

### 1.1.2 Symbolika

Prostředí obsahující zdroj  $\Pi$  budeme nazývat "první" prostředí a zbývající "druhé" prostředí. Abychom odlišili parametry příslušející prvnímu prostředí od parametrů druhého prostředí budeme u druhého prostředí používat čárkovaných symbolů. Pro vyjádření elastických vlastností prvního prostředí budeme používat následující symboly:

$\lambda, \mu$  - Laméovy konstanty,



- $\rho$  - hustota,  
 $c_1$  - fázová rychlost dilatační vlny v neomezeném třírozměrném prostředí,  
 $c_2$  - fázová rychlost příčné vlny,  
 $S$  - reciproká hodnota fázové rychlosti dilatační vlny v neomezeném třírozměrném prostředí,  
 $s$  - reciproká hodnota fázové rychlosti příčné vlny.  
 (U druhého prostředí jsou symboly čárkované.)

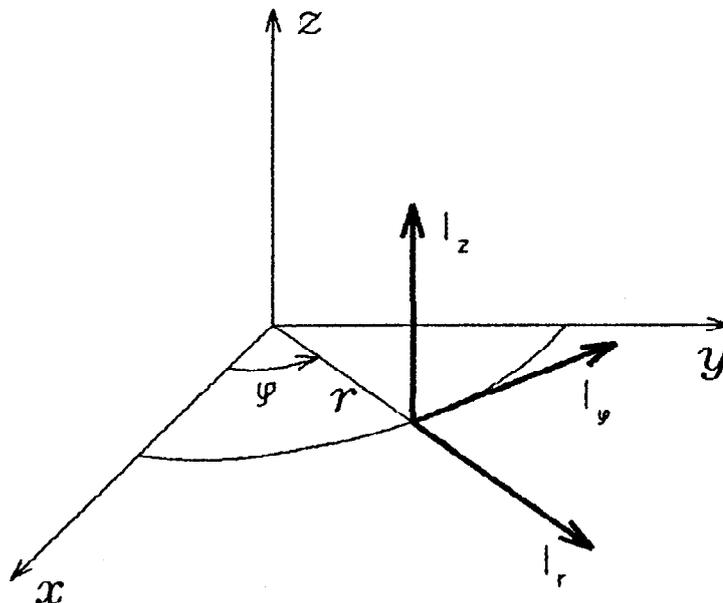
Je známo, že platí

$$\lambda = \rho(c_1^2 - 2 \cdot c_2^2) \quad ,$$

$$\mu = \rho \cdot c_2^2 \quad ,$$

$$s/S = c_1/c_2 = \delta > \sqrt{2} \quad .$$

V našem problému je osa  $z$  osou symetrie. V dalším výkladu budeme uvažovat cylindrické souřadnice  $r, \varphi, z$  (obr.1.3), kde  $x = r \cdot \cos\varphi$  a  $y = r \cdot \sin\varphi$ .



Obr.1.3 Cylindrická souřadnicová soustava a složky vektoru posuvu  $l$

Dále je vhodné zavést radius vektor ze zdroje  $\Pi$

$$R = \sqrt{r^2 + (z - h)^2} .$$

Abychom vyhověli podmínce symetrie, nemůže mít vektor posuvu  $l$  složku  $l_\varphi$  a složky  $l_r$  a  $l_z$  musí být nezávislé na  $\varphi$ .

Vyjádříme-li vektor posuvu  $l$  podle Helmholtze pomocí potenciálů, dostáváme pro jeho jednotlivé složky následující vztahy

$$l_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial z} , \tag{1-1}$$

$$l_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) ,$$

kde  $\Psi$  a  $U$  jsou dvě funkce proměnných  $r$  a  $z$ .  $\Psi$  odpovídá dilatačním vlnám. Dilatace  $\theta$  může být vyjádřena jako

$$\theta = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} .$$

$U$  odpovídá příčným vlnám.

Normálová a smyková napětí jsou dána následujícími výrazy:

Normálová napětí:

$$\sigma_r = \lambda \theta + 2 \mu \frac{\partial l_r}{\partial r} ,$$

$$\sigma_\varphi = \lambda \theta + 2 \mu \frac{l_r}{r} ,$$

$$\sigma_z = \lambda \theta + 2 \mu \frac{\partial l_z}{\partial z} .$$

Smyková napětí:

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad ,$$

$$\tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial l_r}{\partial z} + \frac{\partial l_z}{\partial r} \right) \quad ,$$

$$\tau_{z\varphi} = 0 \quad .$$

### 1.1.3 Vlnová rovnice pro neohraničené prostředí

Pro potenciál  $\Psi$  platí v cylindrických souřadnicích vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = S^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Podobně pro  $U$  dostáváme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} = S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Tyto rovnice jsou splněny uvnitř obou prostředí. (Ve druhém prostředí je třeba  $S$  a  $s$  nahradit  $S'$  a  $s'$ .)

### 1.1.4 Okrajové podmínky

Na hraniční rovině  $xy$  ( $z = 0$ ) musí být složky vektoru posuvu  $l$  spojité

$$l_z = l'_z \quad \text{a} \quad l_r = l'_r$$

tedy

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} = \frac{\partial \Psi'}{\partial z} + \frac{\partial U'}{\partial r} + \frac{U'}{r}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial \Psi'}{\partial r} - \frac{\partial U'}{\partial z}$$

Podobně pro normálová a smyková napětí na hranici platí

$$\sigma_z = \sigma'_z \quad \text{a} \quad \tau_{zr} = \tau'_{zr}$$

tedy

$$\rho \left[ \left( 1 - 2 \frac{s^2}{s^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{2}{s^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] =$$

$$\rho' \left[ \left( 1 - 2 \frac{s'^2}{s'^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial t^2} + \frac{2}{s'^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U'}{\partial z} \right) \right],$$

$$\rho \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{2}{s^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \right] =$$

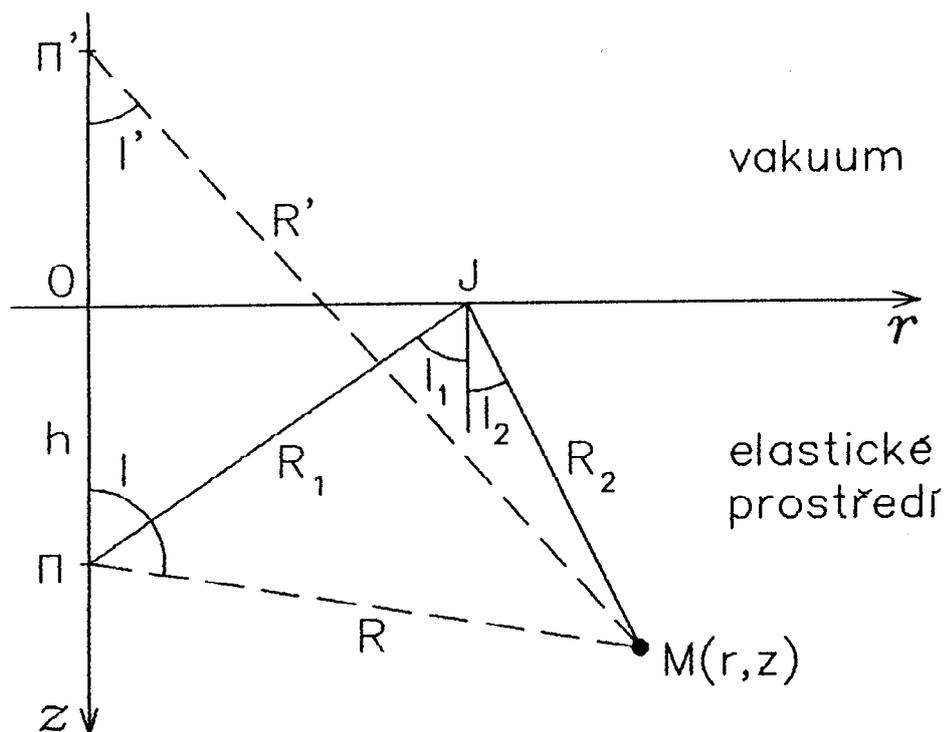
$$\rho' \left[ \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} + \frac{2}{s'^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} \right) \right]$$

#### 1.1.5 Zvláštní případ; druhé prostředí je vakuum

Jelikož se dají v praxi měřit pouze vertikální výchylky na povrchu poloprostoru, soustředíme se dále pouze na zvláštní případ uvedeného problému, kdy je druhým prostředím vakuum. Kompletní řešení problému, tak jak byl definován v kapitole 1.1.1, je uvedeno v [6].

Výsledky, které obdržíme pro tento zvláštní případ "elastické prostředí - vakuum", platí se zanedbatelnou chybou i pro případ "elastické prostředí - plyn(vzduch)", pokud je tlak plynu menší než asi 1 MPa [4].

Abychom se vyhnuli nedorozumění, změním uspořádání tak, že elastické prostředí umístíme dolu a vakuum nahoru, ale z-ovou osu obrátíme dolů, abychom nemuseli měnit rovnice. Hraničním rozhraním, kterému budeme nadále říkat povrch, je rovina  $z = 0$ . Počátek 0 je "epicentrum" a zdroj  $\Pi$  "hypocentrum" umístěné v hloubce  $h$  pod 0 (viz obr.1.4).



Obr.1.4 Změněný souřadnicový systém s vyznačeným epicentrem  $O$ , hypocentrem  $\Pi$  a bodem  $M$ .

Bod  $M$ , ve kterém počítáme složky vektoru posuvu  $l_r, l_z$ , je definován svojí hloubkou  $z$  a vzdáleností  $r$  od osy  $z$ .  $r$  a  $z$  jsou nezáporné ( $r \geq 0, z \geq 0$ ).

$I$  je úhel  $O\Pi M$  ( $0 \leq I \leq \pi$ ).

$I'$  je úhel  $O\Pi' M$  ( $0 \leq I' \leq \pi/2$ ).

Dále budeme na povrchu definovat bod  $J$ , pro který bude platit (viz obr.1.4)

$$\frac{\sin I_1}{\sin I_2} = \frac{s}{S} = \delta > \sqrt{2},$$

kde  $I_1$  je úhel mezi  $\Pi J$  a normálou v bodě  $J$   
a  $I_2$  je úhel mezi  $JM$  a normálou v bodě  $J$ .

Dále označíme

$$\Pi M = R ; \quad \Pi' M = R' ; \quad \Pi J = R_1 ; \quad JM = R_2$$

a

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \sin I \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -\cos I$$

$$\frac{\partial R'}{\partial r} = \sin I' \quad \frac{\partial R'}{\partial z} = \cos I'$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (R_1 S + R_2 S) = s \sin I_2$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (R_1 S + R_2 S) = s \cos I_2$$

Pro složky vektoru posuvu  $l$  platí vztah (1-1)

$$l_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial z} ,$$

$$l_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU)$$

a pro potenciály platí

$$\Psi = \int_0^t \dot{F}(t - \tau) A(\tau) d\tau ,$$

$$U = \int_0^t \dot{F}(t - \tau) B(\tau) d\tau ,$$

kde  $F(t)$  je funkce buzení, spojitá a libovolně diferencovatelná a nulová pro  $t \leq 0$  a  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$  jsou transmisní faktory.

Transmisní faktory  $A(\tau)$  a  $B(\tau)$  jsou dány vztahy [6]

$$A(\tau) = 0 \quad ; \tau < RS \quad (1-2)$$

$$= 1/R \quad ; RS < \tau < R'S$$

$$= 1/R - 1/R' + A_3(\tau) \quad ; \tau > R'S$$

$$\text{kde } A_3(\tau) = -\frac{i}{\pi} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 r^2 + [\tau - a(h+z)]^2}} j(u) u \, du$$

a

$$B(\tau) = 0 \quad ; \tau < R_1 S + R_2 s \quad (1-3)$$

$$= B_3(\tau) \quad ; \tau > R_1 S + R_2 s$$

$$\text{kde } B_3(\tau) = \frac{i}{\pi r} \int \frac{\tau - ah - bz}{\sqrt{u^2 r^2 + [\tau - ah - bz]^2}} f(u) u \, du$$

kde

$$f(u) = \frac{u^2 + (s^2/2)}{D(u)}$$

$$j(u) = -\frac{b u^2}{D(u)}$$

$$D(u) = \left[ u^2 + \frac{s^2}{2} \right]^2 - a \cdot b \cdot u^2$$

$$a = \sqrt{u^2 + s^2}$$

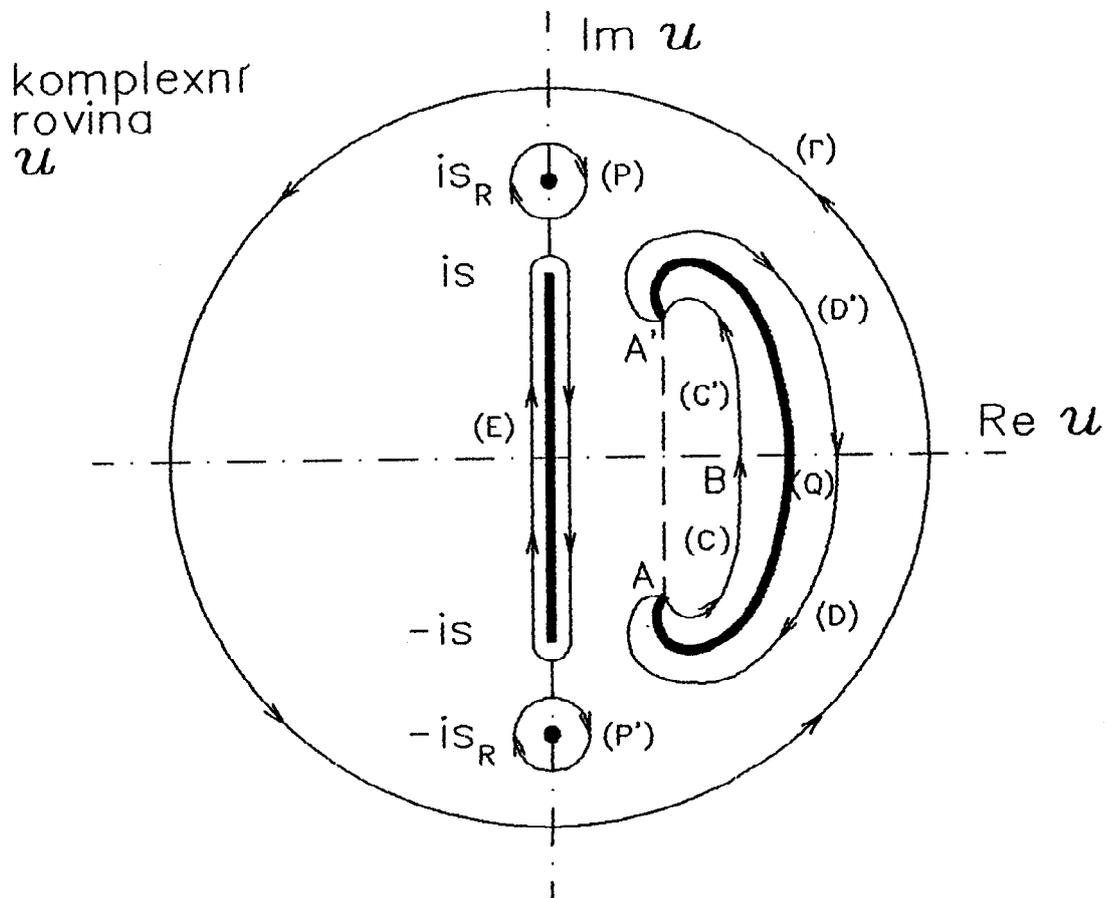
$$b = \sqrt{u^2 + s^2}$$

V rovnici (1-2) resp. (1-3) se provádí integrace podél cesty (C,C') a (D,D') (viz obr.1.5), která obepíná řez definovaný odmocninou ve jmenovateli integrandu rovnice (1-2) resp. (1-3).

Jelikož platí

$$\int_{(C,C')} + \int_{(D,D')} = 2 \int_{(C,C')}$$

bývá obvyklé nahradit integrační cestu (C,C') přímou cestou (A,A') (viz obr.1.5). Jinou možností je použít ekvivalentních cest (Γ), (E), (P), (P') (viz obr.1.5):



Obr. 1.5 Integrační cesty integrálů  
ze vztahů (1-2) a (1-3).

$$\int_{(C, C', D, D')} = - \int_{(\Gamma)} - \int_{(E)} - \int_{(P)} - \int_{(P')},$$

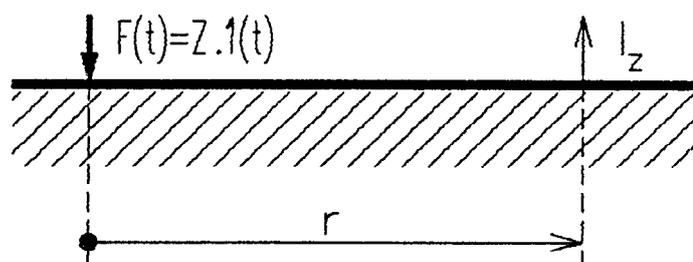
- kde  $(\Gamma)$  je cesta, která leží vně všech ostatních cest;  
 $(E)$  je cesta podél řezu na imaginární ose, řez je definován úsečkou spojující body  $[0; \pm iS]$ ;  
 $(P)$  je cesta okolo pólu  $P$ , jehož souřadnice jsou  $[0; iS_R]$ , kde  $S_R = 1/c_R$  ( $c_R$  - rychlost Rayleighovy vlny);  
 $(P')$  je cesta okolo pólu  $P'$ , jehož souřadnice jsou  $[0; -iS_R]$ .



Přesto, že vztahy (1-2), (1-3) plně popisují řešení daného problému, je numerický výpočet opírající se o tyto vztahy velice komplikovaný (problematická konvergence křivkových integrálů, neúměrně dlouhá doba výpočtu atd.). V následujících dvou kapitolách je uveden postup výpočtu výchylek na povrchu poloprostoru pro povrchové a podpovrchové buzení skokovou funkcí síly, který je z numerického hlediska mnohem výhodnější.

### 1.2 Příklad povrchového buzení skokovou funkcí síly

Pro numerický výpočet axiální složky vektoru posuvu  $l_z$  na povrchu poloprostoru ( $z = 0$ ) v případě povrchového buzení skokovou funkcí síly (viz obr.1.6) je výhodné využít Pekerisovo řešení v uzavřeném tvaru [16].



Obr.1.6 Příklad povrchového buzení poloprostoru

Postup numerického výpočtu podle tohoto řešení je popsán v [13] :

$$\begin{aligned}
 l_z(\tau) &= 0 && ; \tau < 1/\delta \\
 &= \frac{\delta^2 Z}{\pi^2 \mu r} G_1(\tau) && ; 1/\delta < \tau < 1 \\
 &= \frac{\delta^2 Z}{\pi^2 \mu r} [G_1(\tau) + G_2(\tau)] && ; \tau > 1
 \end{aligned}$$

kde

$$G_1(\tau) = \mathcal{P}r \int_{1/\delta}^{\tau} \frac{v (1-2v^2)^2 \sqrt{v^2 - 1/\delta^2}}{f(v) \sqrt{\tau^2 - v^2}} dv \quad (1-4)$$

$$G_2(\tau) = \mathcal{P}r \int_1^{\tau} \frac{4 v^3 (v^2 - 1/\delta^2) \sqrt{v^2 - 1}}{f(v) \sqrt{\tau^2 - v^2}} dv \quad (1-5)$$

kde  $\mathcal{P}r$  značí hlavní hodnotu,

$\tau$  je bezrozměrný čas ( $\tau = (c_2/r) \cdot t$ ),

$\delta$  je rychlostní poměr  $c_1/c_2$ ,

$Z$  je celková síla působící v místě zdroje  
( $F(t) = Z \cdot 1(t)$ )

$$a \quad f(v) = \delta^2 - 8\delta^2 v^2 + 8v^4(3\delta^2 - 2) - 16v^6(\delta^2 - 1) .$$

Pro vyhodnocení  $G_1(\tau)$  použijeme následující substituce :

$$v^2 = 1/\delta^2 + \omega^2 \sin^2 \theta \quad ,$$

$$\omega^2 = \tau^2 - 1/\delta^2 \quad ,$$

$$x = \omega^2 \sin^2 \theta \quad ;$$

tím získáme vztah (1-4) ve tvaru

$$G_1(\tau) = \mathcal{P}r \int_0^{\pi/2} \frac{x (1-2/\delta^2 - 2x)^2}{f(v)} d\theta \quad (1-6)$$

$$kde \quad f(v) = E(P + Qx + Rx^2 + x^3)$$

$$a \quad E = 16(1-\delta^2)$$

$$PE = \delta^2 - 8 + 24/\delta^2 - 32/\delta^4 + 16/\delta^6 \quad ,$$

$$QE = -8(\delta^2 - 6 + 10/\delta^2 - 6/\delta^4) \quad ,$$

$$RE = 8(3\delta^2 - 8 + 6/\delta^2) \quad .$$

Nyní můžeme provést rozklad  $G_1(\tau)$  v částečné zlomky pomocí tří kořenů  $a_1, a_2, a_3$  kubického polynomu  $f(v)$ . Pro Poissonova čísla  $\sigma < 0,263$  jsou všechny kořeny reálné a vztah (1-6) bude mít tvar

$$G_1(\tau) = \frac{1}{E} \gamma r \int_0^{\pi/2} \left[ 4 + \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_2} + \frac{A_3}{x+a_3} \right] d\theta \quad (1-7)$$

Pro Poissonovo číslo  $\sigma > 0,263$  jsou dva kořeny komplexně sdružené ( $a_R \pm ia_I$ ) a výraz (1-6) bude mít tvar

$$G_1(\tau) = \frac{1}{E} \gamma r \int_0^{\pi/2} \left[ 4 + \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_R + ia_I}{x+a_R + ia_I} + \frac{A_R - ia_I}{x+a_R - ia_I} \right] d\theta \quad (1-8)$$

Numerické hodnoty  $a_1, a_2, a_3, a_R, a_I, A_1, A_2, A_3, A_R, A_I$  jsou v závislosti na Poissonově čísle uvedeny v Tab 1.2.

Pro vyhodnocení  $G_2(\tau)$  použijeme substituci :

$$v^2 = 1/\delta^2 + \bar{\omega}^2 \sin^2 \theta \quad ,$$

$$\bar{\omega}^2 = \tau^2 - 1/\delta^2 \quad ,$$

$$x = \bar{\omega}^2 \sin^2 \theta \quad ;$$

tím získáme vztah (1-5) ve tvaru

$$G_2(\tau) = \gamma r \int_0^{\pi/2} \frac{4x(1+x)(1-1/\delta^2+x)}{f(v)} d\theta \quad (1-9)$$

kde  $f(v) = E(P' + Q'x + R'x^2 + x^3)$

a

$$P'E = \delta^2 \quad ,$$

$$Q'E = -8(\delta^2 - 2) \quad ,$$

$$R'E = -8(3\delta^2 - 4) \quad .$$

(E je stejné jako v (1-6))

Nyní opět provedeme rozklad v částečné zlomky pomocí tří

kořenů  $b_1, b_2, b_3$  kubického polynomu  $f(v)$ . Pro Poissonova čísla  $\sigma < 0,263$  jsou všechny kořeny reálné a vztah (1-9) bude mít tvar

$$G_2(\tau) = \frac{1}{E} \gamma \int_0^{\pi/2} \left[ 4 + \frac{B_1}{x+b_1} + \frac{B_2}{x+b_2} + \frac{B_3}{x+b_3} \right] d\theta \quad (1-10)$$

Pro Poissonovo číslo  $\sigma > 0,263$  jsou dva kořeny komplexně sdružené ( $b_R \pm ib_I$ ) a výraz (1-9) bude mít tvar

$$G_2(\tau) = \frac{1}{E} \gamma \int_0^{\pi/2} \left[ 4 + \frac{B_1}{x+b_1} + \frac{B_R + iB_I}{x+b_R + ib_I} + \frac{B_R - iB_I}{x+b_R - ib_I} \right] d\theta \quad (1-11)$$

Mezi kořeny platí následující závislosti

$$b_I = a_I$$

$$b_i = 1 - 1/\sigma^2 + a_i$$

Ve vztazích (1-7), (1-8) a (1-10), (1-11) se vyskytují pouze integrály typu

$$INT = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{C + D \sin^2 \theta},$$

kde  $D$  je kladné reálné číslo a  $C = C_R + iC_I$  může být též komplexní číslo. Nahradíme-li  $\sin^2 \theta$  výrazem  $(1 - \cos 2\theta)/2$  a uijeme-li symetrických vlastností integrandu, dostaneme

$$INT = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{C + D(1 - \cos 2\theta)/2}$$

Použijeme-li nyní substituci  $\alpha = 2\theta$  a  $z = e^{i\alpha}$ , dostaneme

$$\text{INT} = \frac{i}{D} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

kde

$$z_{1,2} = \frac{D + 2C \pm 2\sqrt{C^2 + CD}}{D}$$

Pro speciální případ reálného  $C$  dostaneme podle reziduové věty následující řešení

$$\text{INT} = \frac{(\text{sign } C) \frac{\pi}{2}}{\sqrt{C^2 + CD}} \quad ; C^2 + CD > 0 \quad (1-12)$$

$$\text{INT} = 0 \quad ; C^2 + CD < 0$$

V případě komplexního  $C$  nabývá řešení v podstatě stejného tvaru, ale objevují se komplikace při určování znaménka u druhé odmocniny.

Nechť  $R = C_R/D$  a  $I = C_I/D$ . Póly jsou umístěny v

$$z_{1,2} = (1 + 2R \pm 2K \cos\Psi) + 2i(I \pm K \sin\Psi),$$

kde  $K^4 = (R^2 + I^2)[(R+1)^2 + I^2]$ .

K určení  $\Psi$ , musíme nejprve vypočítat  $\Phi$ , které je definováno jako

$$\text{tg } 2\Phi = |Y/X|,$$

kde

$$X = R^2 + R - I^2$$

$$Y = I(1 + 2R)$$

Potom pro

$$\begin{array}{ll} X > 0 & \sin\Psi = \sin\Phi \\ & \cos\Psi = (\text{sign } Y) \cos\Phi \\ X < 0 & \sin\Psi = \cos\Phi \\ & \cos\Psi = (\text{sign } Y) \sin\Phi \end{array}$$

Po vypočtení rezidují obdržíme

$$\text{INT} = \frac{(\text{sign } I) \frac{\pi}{2}}{\text{KD}} e^{-i\Psi} \quad , \quad (1-13)$$

kde

$$(\text{KD})^4 = [C_R^2 + C_I^2][(C_R + D)^2 + C_I^2] \quad .$$

Pomocí vztahů (1-12) a (1-13) již snadno vypočítáme integrály ve vztazích (1-7), (1-8) a (1-10), (1-11). Shrneme-li dosavadní výsledky, dostaneme pro numerický výpočet normované axiální složky vektoru posuvu  $L_z(\tau)$  (tj. časově závislá část řešení pro axiální složku vektoru posuvu  $l_z(\tau)$ )

$$L_z(\tau) = \frac{l_z(\tau)}{\left[ \frac{\delta^2 z}{\pi^2 \mu r} \right]}$$

následující předpis :

- pro  $\tau < 1/\delta^2$

$$L_z(\tau) = 0$$

- pro  $1/\delta^2 < \tau < 1$  a  $\sigma < 0,263$

$$L_z(\tau) = \frac{\pi}{32(1 - \delta^2)} \left[ 4 - \frac{A_1}{\sqrt{-a_1}} \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \tau^2}} + \right. \\ \left. + \frac{A_2}{\sqrt{a_2}} \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - 1/\delta^2 + a_2}} + \frac{A_3}{\sqrt{a_3}} \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - 1/\delta^2 + a_3}} \right]$$

- pro  $1/\delta^2 < \tau < 1$  a  $\sigma > 0,263$

$$L_z(\tau) = \frac{\pi}{32(1 - \delta^2)} \left[ 4 - \frac{A_1}{\sqrt{-a_1}} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \tau^2}} + \right. \\ \left. + 2 \frac{A_R \cos\Psi + A_I \sin\Psi}{KD} \right]$$

kde

$$KD = 4 \sqrt{(a_R^2 + a_I^2) \left[ (a_R + \tau^2 - 1/\delta^2)^2 + a_I^2 \right]}$$

$$X = \left[ \frac{a_R}{\tau^2 - 1/\delta^2} \right]^2 + \frac{a_R}{\tau^2 - 1/\delta^2} - \left[ \frac{a_I}{\tau^2 - 1/\delta^2} \right]^2$$

$$Y = \frac{a_I}{\tau^2 - 1/\delta^2} \left[ 1 + 2 \frac{a_I}{\tau^2 - 1/\delta^2} \right]$$

$$\Phi = 0,5 \operatorname{arctg} \left| \frac{Y}{X} \right|$$

$$X > 0 \quad \begin{aligned} \sin\Psi &= \sin\Phi \\ \cos\Psi &= (\operatorname{sign} Y) \cos\Phi \end{aligned}$$

$$X < 0 \quad \begin{aligned} \sin\Psi &= \cos\Phi \\ \cos\Psi &= (\operatorname{sign} Y) \sin\Phi \end{aligned}$$

- pro  $1 < \tau < \gamma$

$$L_z(\tau) = \frac{\pi}{16(1 - \delta^2)} \left[ 4 - \frac{A_1}{\sqrt{-a_1}} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \tau^2}} \right]$$

- pro  $\tau > \gamma$

$$L_z(\tau) = \frac{\pi}{4(1 - \delta^2)}$$

Hodnoty  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $A_R$ ,  $A_I$ ,  $a_R$ ,  $a_I$  jsou pro různé hodnoty Poissonova čísla  $\sigma$  uvedeny v tabulce 1.2  $\gamma$  je dáno klasickou Rayleigho rovnicí

$$(1 - 2\gamma^2)^2 = -4\gamma^2 \sqrt{(\delta^{-2} - \gamma^2)(1 - \gamma^2)} .$$

Časové závislosti normované axiální složky vektoru posuvu  $L_z$  na povrchu poloprostoru pro různé hodnoty Poissonova čísla jsou uvedeny na obr.1.7.



$\sigma$	$A_1$	$A_2 (*A_R)$	$A_3 (*A_I)$
$\gamma$	$a_1$	$a_2 (*a_R)$	$a_3 (*a_I)$
1.000E-02	2.322E+00	2.190E-12	-3.418E-01
1.142E+00	-8.082E-01	5.259E-09	3.031E-01
2.000E-02	2.303E+00	1.538E-10	-3.418E-01
1.139E+00	-8.076E-01	8.858E-08	2.970E-01
3.000E-02	2.284E+00	1.926E-09	-3.417E-01
1.137E+00	-8.072E-01	4.726E-07	2.908E-01
4.000E-02	2.265E+00	1.192E-08	-3.416E-01
1.134E+00	-8.069E-01	1.576E-06	2.844E-01
5.000E-02	2.247E+00	5.022E-08	-3.413E-01
1.132E+00	-8.069E-01	4.064E-06	2.779E-01
6.000E-02	2.229E+00	1.660E-07	-3.409E-01
1.129E+00	-8.070E-01	8.912E-06	2.712E-01
7.000E-02	2.211E+00	4.647E-07	-3.404E-01
1.127E+00	-8.072E-01	1.749E-05	2.643E-01
8.000E-02	2.194E+00	1.153E-06	-3.397E-01
1.124E+00	-8.077E-01	3.164E-05	2.573E-01
9.000E-02	2.177E+00	2.613E-06	-3.389E-01
1.122E+00	-8.084E-01	5.385E-05	2.500E-01
1.000E-01	2.160E+00	5.515E-06	-3.380E-01
1.120E+00	-8.093E-01	8.737E-05	2.425E-01
1.100E-01	2.144E+00	1.101E-05	-3.369E-01
1.117E+00	-8.103E-01	1.364E-04	2.348E-01
1.200E-01	2.128E+00	2.100E-05	-3.356E-01
1.115E+00	-8.116E-01	2.066E-04	2.269E-01
1.300E-01	2.113E+00	3.865E-05	-3.341E-01
1.113E+00	-8.131E-01	3.050E-04	2.187E-01
1.400E-01	2.098E+00	6.907E-05	-3.325E-01
1.111E+00	-8.148E-01	4.408E-04	2.102E-01
1.500E-01	2.083E+00	1.206E-04	-3.306E-01
1.108E+00	-8.167E-01	6.264E-04	2.014E-01
1.600E-01	2.069E+00	2.067E-04	-3.286E-01
1.106E+00	-8.189E-01	8.777E-04	1.923E-01
1.700E-01	2.056E+00	3.496E-04	-3.263E-01
1.104E+00	-8.213E-01	1.216E-03	1.828E-01
1.800E-01	2.042E+00	5.863E-04	-3.239E-01
1.102E+00	-8.239E-01	1.670E-03	1.730E-01

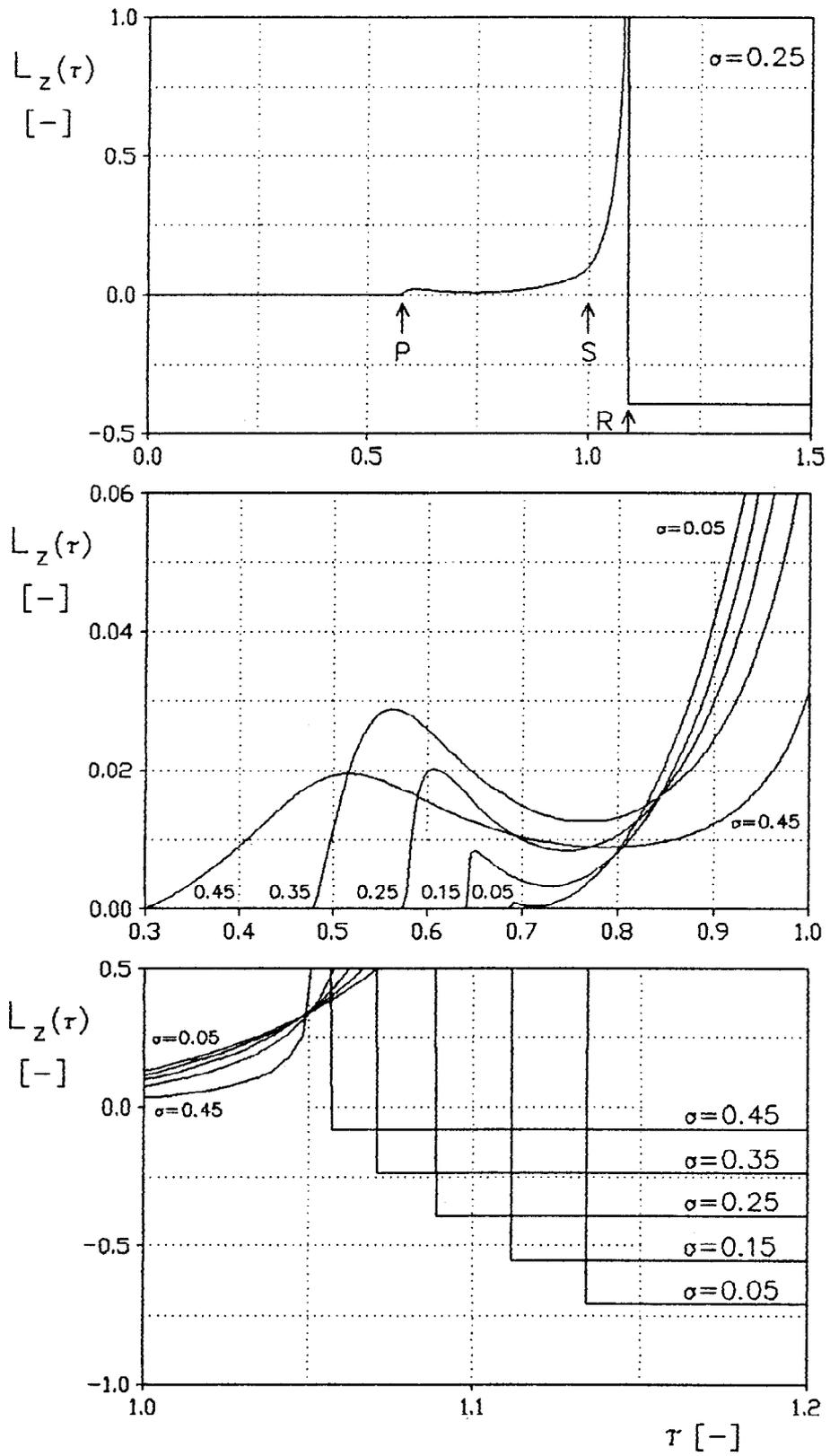
Tab. 1.2

$\sigma$	$A_1$	$A_2 (*A_R)$	$A_3 (*A_I)$
$\gamma$	$a_1$	$a_2 (*a_R)$	$a_3 (*a_I)$
1.900E-01	2.030E+00	9.799E-04	-3.213E-01
1.100E+00	-8.268E-01	2.279E-03	1.627E-01
2.000E-01	2.017E+00	1.642E-03	-3.188E-01
1.098E+00	-8.299E-01	3.100E-03	1.518E-01
2.100E-01	2.005E+00	2.779E-03	-3.163E-01
1.096E+00	-8.333E-01	4.214E-03	1.404E-01
2.200E-01	1.994E+00	4.804E-03	-3.144E-01
1.094E+00	-8.370E-01	5.752E-03	1.282E-01
2.300E-01	1.983E+00	8.630E-03	-3.140E-01
1.092E+00	-8.409E-01	7.925E-03	1.150E-01
2.400E-01	1.972E+00	1.667E-02	-3.173E-01
1.090E+00	-8.452E-01	1.114E-02	1.003E-01
2.500E-01	1.962E+00	3.775E-02	-3.333E-01
1.088E+00	-8.497E-01	1.635E-02	8.333E-02
2.600E-01	1.953E+00	1.589E-01	-4.489E-01
1.086E+00	-8.545E-01	2.752E-02	5.995E-02
2.700E-01	1.944E+00	-1.420E-01*	1.480E-01*
1.084E+00	-8.596E-01	3.741E-02*	2.423E-02*
2.800E-01	1.935E+00	-1.387E-01*	5.783E-02*
1.082E+00	-8.651E-01	3.086E-02*	3.778E-02*
2.900E-01	1.927E+00	-1.352E-01*	1.519E-02*
1.080E+00	-8.708E-01	2.408E-02*	4.751E-02*
3.000E-01	1.920E+00	-1.314E-01*	-1.457E-02*
1.078E+00	-8.769E-01	1.705E-02*	5.546E-02*
3.100E-01	1.913E+00	-1.273E-01*	-3.864E-02*
1.076E+00	-8.834E-01	9.751E-03*	6.231E-02*
3.200E-01	1.907E+00	-1.228E-01*	-5.969E-02*
1.075E+00	-8.902E-01	2.183E-03*	6.839E-02*
3.300E-01	1.901E+00	-1.180E-01*	-7.899E-02*
1.073E+00	-8.975E-01	-5.674E-03*	7.389E-02*
3.400E-01	1.896E+00	-1.128E-01*	-9.726E-02*
1.071E+00	-9.051E-01	-1.383E-02*	7.892E-02*
3.500E-01	1.891E+00	-1.073E-01*	-1.150E-01*
1.070E+00	-9.131E-01	-2.231E-02*	8.356E-02*
3.600E-01	1.888E+00	-1.013E-01*	-1.324E-01*
1.068E+00	-9.215E-01	-3.113E-02*	8.788E-02*

Tab.1.2 pokračování

$\sigma$	$A_1$	$A_2 (*A_R)$	$A_3 (*A_I)$
$\gamma$	$a_1$	$a_2 (*a_R)$	$a_3 (*a_I)$
3.700E-01	1.884E+00	-9.485E-02*	-1.498E-01*
1.066E+00	-9.304E-01	-4.029E-02*	9.191E-02*
3.800E-01	1.882E+00	-8.794E-02*	-1.673E-01*
1.065E+00	-9.397E-01	-4.983E-02*	9.568E-02*
3.900E-01	1.880E+00	-8.053E-02*	-1.851E-01*
1.063E+00	-9.495E-01	-5.976E-02*	9.923E-02*
4.000E-01	1.879E+00	-7.259E-02*	-2.033E-01*
1.061E+00	-9.598E-01	-7.010E-02*	1.026E-01*
4.100E-01	1.878E+00	-6.408E-02*	-2.221E-01*
1.060E+00	-9.706E-01	-8.088E-02*	1.057E-01*
4.200E-01	1.878E+00	-5.495E-02*	-2.415E-01*
1.058E+00	-9.820E-01	-9.212E-02*	1.087E-01*
4.300E-01	1.879E+00	-4.518E-02*	-2.617E-01*
1.057E+00	-9.939E-01	-1.038E-01*	1.115E-01*
4.400E-01	1.881E+00	-3.472E-02*	-2.827E-01*
1.055E+00	-1.006E+00	-1.161E-01*	1.142E-01*
4.500E-01	1.883E+00	-2.352E-02*	-3.047E-01*
1.054E+00	-1.020E+00	-1.289E-01*	1.167E-01*
4.600E-01	1.887E+00	-1.154E-02*	-3.279E-01*
1.052E+00	-1.033E+00	-1.422E-01*	1.190E-01*
4.700E-01	1.891E+00	1.284E-03*	-3.522E-01*
1.051E+00	-1.048E+00	-1.562E-01*	1.213E-01*
4.800E-01	1.896E+00	1.500E-02*	-3.780E-01*
1.050E+00	-1.063E+00	-1.708E-01*	1.234E-01*
4.900E-01	1.902E+00	2.967E-02*	-4.052E-01*
1.048E+00	-1.079E+00	-1.861E-01*	1.254E-01*

Tab. 1.2 pokračování

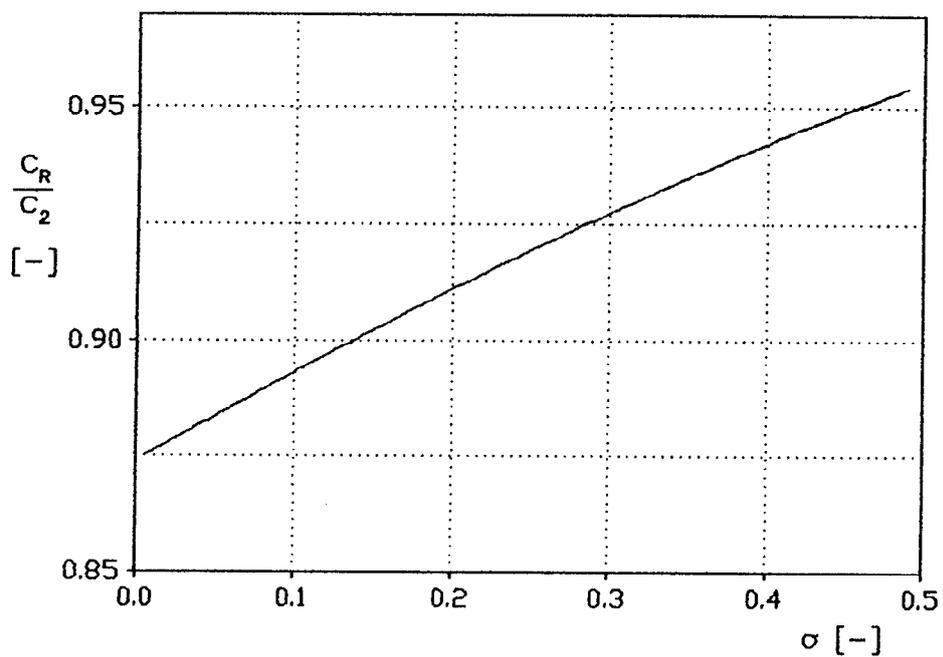
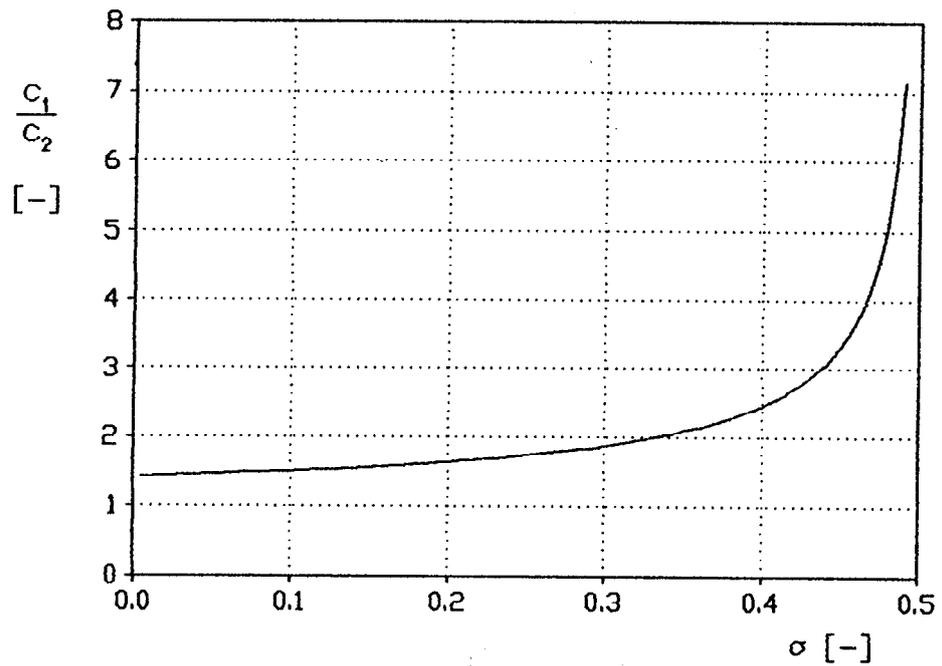


Obr.1.7 Časové závislosti normované axiální složky

Několik poznámek k obr.1.7:

- všechny odezvy jsou přímo úměrné celkové síle  $Z$
- časy příchodů jsou následující: nejprve dorazí od zdroje podélná vlna (P), potom příčná vlna (S) a nakonec Rayleighova vlna (R)
- pro  $\tau < 1/\delta$  je  $L_z(\tau)$  nulové, neboť do daného místa ještě nedospěla podélná vlna, která se šíří nejvyšší rychlostí  $c_1$
- pro  $1/\delta < \tau < 1$ , což odpovídá době, po kterou působí pouze podélná vlna, závisí chování  $L_z(\tau)$  na tom, zda je Poissonovo číslo větší nebo menší než 0,263. Tento efekt souvisí se změnou charakteru kořenů kubického polynomu  $f(v)$  ve vztazích (1-6) a (1-9), kdy dochází ke změně tří reálných kořenů na jeden kořen reálný a dva komplexně sdružené. Jak se Poissonovo číslo zvětšuje vzhledem k 0,263, objevuje se příchod podélné vlny dříve vzhledem k příchodu příčné vlny a jeho charakter je plynulejší - čelo je méně strmé.
- se stoupajícím Poissonovým číslem se zvětšuje doba mezi příchodem podélné ( $\tau = 1/\delta$ ) a příčné ( $\tau = 1$ ) vlny, kdežto doba mezi příchodem příčné ( $\tau = 1$ ) a Rayleighovy ( $\tau = \gamma$ ) vlny klesá. Tyto výsledky souvisejí se známou závislostí rychlostí  $c_1$ ,  $c_2$  a  $c_R$  na Poissonově čísle (viz obr.1.8).
- se stoupajícím Poissonovým číslem se dále zvětšuje amplituda pulsu v době příchodu podélné vlny (pouze pro  $\sigma < 0,35$ ) a délka tohoto pulsu, přičemž zároveň s tím klesá jeho strmost. Efekt klesající strmosti by byl zřetelnější při vyjádření v reálném než bezrozměrném čase.
- příchod příčné vlny ( $\tau = 1$ ) je reprezentován pouze změnou sklonu průběhu (skok v derivaci). Tato změna sklonu je patrnější při vyšších hodnotách Poissonova čísla. (Jak uvidíme ve druhé kapitole, je u experimentálně získaných průběhů změna ve sklonu obtížně identifikovatelná.)
- se stoupajícím Poissonovým číslem se šířka Rayleighova pulsu podstatně zmenšuje
- konstantní úroveň  $L_z(\tau)$ , která následuje po Rayleighově pulsu, se zmenšuje se stoupající hodnotou Poissonova čísla

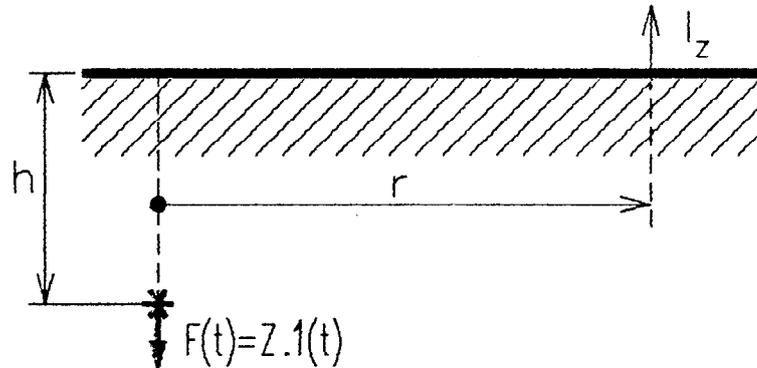
- všechny křivky procházejí společným bodem  $\tau = 1,05$ . Tento bod je z fyzikálního hlediska bodem příchodu Rayleighovy vlny v limitním případě ideální kapaliny.



Obr. 1.8 Závislost  $c_1/c_2$  a  $c_R/c_2$  na Poissonově čísle  $\sigma$

### 1.3 Příklad podpovrchového buzení skokovou funkcí síly

Pro numerický výpočet axiální složky vektoru posuvu  $l_z$  na povrchu poloprostoru ( $z = 0$ ) v případě podpovrchového buzení skokovou funkcí síly (viz obr.1.9) je výhodné využít Pekerisovo řešení v uzavřeném tvaru [17,18].



Obr.1.9 Příklad podpovrchového buzení poloprostoru

Toto řešení platí pro poloprostor, který je charakterizován elastickými konstantami  $\lambda$  a  $\mu$ , o nichž se předpokládá, že jsou stejné ( $\lambda = \mu \Rightarrow \delta = 3$ ; tudíž jde o Poissonovo těleso).

Nechť

$$l_z(\tau) = \frac{3 Z}{\pi^2 \mu R} L_z \quad (1-14)$$

kde

$$L_z = G_1(\tau) + G_2(\tau)$$

$$\tau = \frac{c_2}{R} t \quad - \text{bezrozměrný čas,}$$

$$R = \sqrt{r^2 + h^2} \quad - \text{radiusvektor,}$$

$Z$  je celková síla působící v místě zdroje ( $F(t) = Z \cdot 1(t)$ ),

$$q = \frac{h}{R} .$$

$G_1(\tau)$  představuje tlakovou (podélnou) složku a  $G_2(\tau)$  příčnou složku vlny. Z [17] plynou pro  $G_1(\tau)$  a  $G_2(\tau)$  tyto vztahy :

$$G_1(\tau) = 0 \quad \tau < 1/\sqrt{3}$$

$$G_1(\tau) = -\frac{1}{3} \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha^2 (2x^2 + 1)}{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2 \alpha \beta} d\Phi \right] \quad \tau > 1/\sqrt{3} \quad (1-15)$$

kde

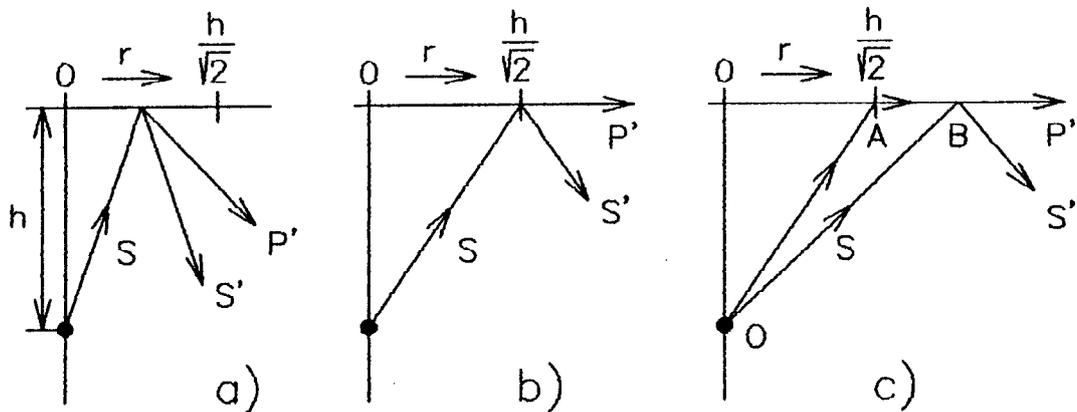
$$\beta = \sqrt{\alpha^2 + 2/3}$$

$$x = \sqrt{\alpha^2 - 1/3}$$

$$\alpha = q\tau + i \nu \sin\Phi$$

$$\nu = \sqrt{(1 - q^2)(\tau^2 - 1/3)}$$

Velice rychlá podélná vlna  $G_1(\tau)$ , která první dospěje k povrchu, se všeobecně mění jednoduchým způsobem a je po celou dobu reprezentována vztahem (1-15). Pomalá příčná vlna  $G_2(\tau)$  má naproti tomu komplikovanější povahu způsobenou lomovým jevem. Podívejme se na obr.1.10.



Obr.1.10 Odraz a lom S-vlny

S-vlna dopadající na povrch se částečně odráží jako



S'-vlna a částečně jako P'-vlna. Odražená P'-vlna se ovšem šíří rychlostí  $c_1$ . Při  $r=h/\sqrt{2}$  se P'-vlna šíří v horizontálním směru. (Hodnota  $r=h/\sqrt{2}$  odpovídá úhlu totálního odrazu pro Poissonovo číslo  $\sigma=0,25$ .) Podle paprskové teorie [6,14] přechází v tomto bodě veškerá energie dopadající S-vlny do totálně odražené S'-vlny. V bodech vzdálenějších více jak  $h/\sqrt{2}$ ; např. bod B na obr.1.10, existují mimo přímých příčných S vln ještě vlny, které se šíří podél dráhy OAB; podél OA se šíří rychlostí  $c_2$  a podél AB rychlostí  $c_1$ . Tuto lomenou vlnu budeme označovat SP. Je dokázáno, že doba pohybu pro SP je menší než S, přestože má delší dráhu (Fermatův princip). Pořadí příchodu různých fází je proto P, S, když  $r < h/\sqrt{2}$ , a P, SP, S, když  $r > h/\sqrt{2}$ .

Z důvodu výše uvedených fyzikálních okolností, jsou výrazy pro  $G_2(\tau)$  rozdílné podle toho, je-li  $r < h/\sqrt{2}$  nebo  $r > h/\sqrt{2}$ . Pro  $r < h/\sqrt{2}$  dostáváme

$$G_2(\tau) = 0 \quad \tau < 1$$

$$G_2(\tau) = \frac{1}{3} \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{2x^2 \alpha \beta}{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2 \alpha \beta} d\Phi \right] \quad \tau > 1$$

(1-16)

kde

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - 2/3} \quad x = \sqrt{\beta^2 - 1/3}$$

$$\beta = q\tau + i \mu \sin\Phi \quad \nu = \sqrt{(1 - q^2)(\tau^2 - 1)}$$

Pro  $r > h/\sqrt{2}$  (první příchod SP-vlny je v čase  $\tau^*$ ) dostáváme

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2q^2}{3}} + \sqrt{\frac{1 - q^2}{3}}$$

$$G_2(\tau) = 0 \quad \tau < \tau^*$$

$$G_2(\tau) = -\frac{1}{3} \operatorname{Im} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{2x^2 \alpha \beta}{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2 \alpha \beta} \frac{\cos \Phi}{\sqrt{k^2 + \sin^2 \Phi}} d\Phi \right]$$

$$\tau^* < \tau < 1$$

(1-17)

kde

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - 2/3} \quad x = \sqrt{\beta^2 - 1}$$

$$\beta = q\tau + m \sqrt{k^2 + \sin^2 \Phi} \quad \mu = \sqrt{(1 - q^2)(1 - \tau^2)}$$

$$k = \frac{\mu}{m} \quad m = \sqrt{d^2 - \mu^2} \quad d = \sqrt{\frac{2}{3}} - q\tau$$

Po příchodu přímé S-vlny ( $\tau > 1$ ) je  $G_2(\tau)$  dáno

$$G_2(\tau) = \frac{1}{3} \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{2x^2 \alpha \beta}{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2 \alpha \beta} d\Phi \right] -$$

$$- \frac{d}{3} \operatorname{Im} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{2x^2 \alpha \beta}{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2 \alpha \beta} \frac{\cos \Phi}{\sqrt{\mu^2 + d^2 \sin^2 \Phi}} d\Phi \right]$$

$$1 < \tau < \sqrt{\frac{2}{3q^2}}$$

(1-18)

kde v prvním integrálu používáme substituci

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - 2/3} \quad x = \sqrt{\beta^2 - 1}$$

$$\beta = q\tau + i \mu \sin \Phi \quad \mu = \sqrt{(1 - q^2)(\tau^2 - 1)}$$

a ve druhém integrálu substituci

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - 2/3} \quad x = \sqrt{\beta^2 - 1}$$

$$\beta = q\tau + d \sin \phi \quad d = \sqrt{\frac{2}{3}} - q\tau$$

a

$$G_2(\tau) = \frac{1}{3} \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{2x^2 \alpha \beta}{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2 \alpha \beta} d\phi \right] \quad \tau > \sqrt{\frac{2}{3q^2}}$$

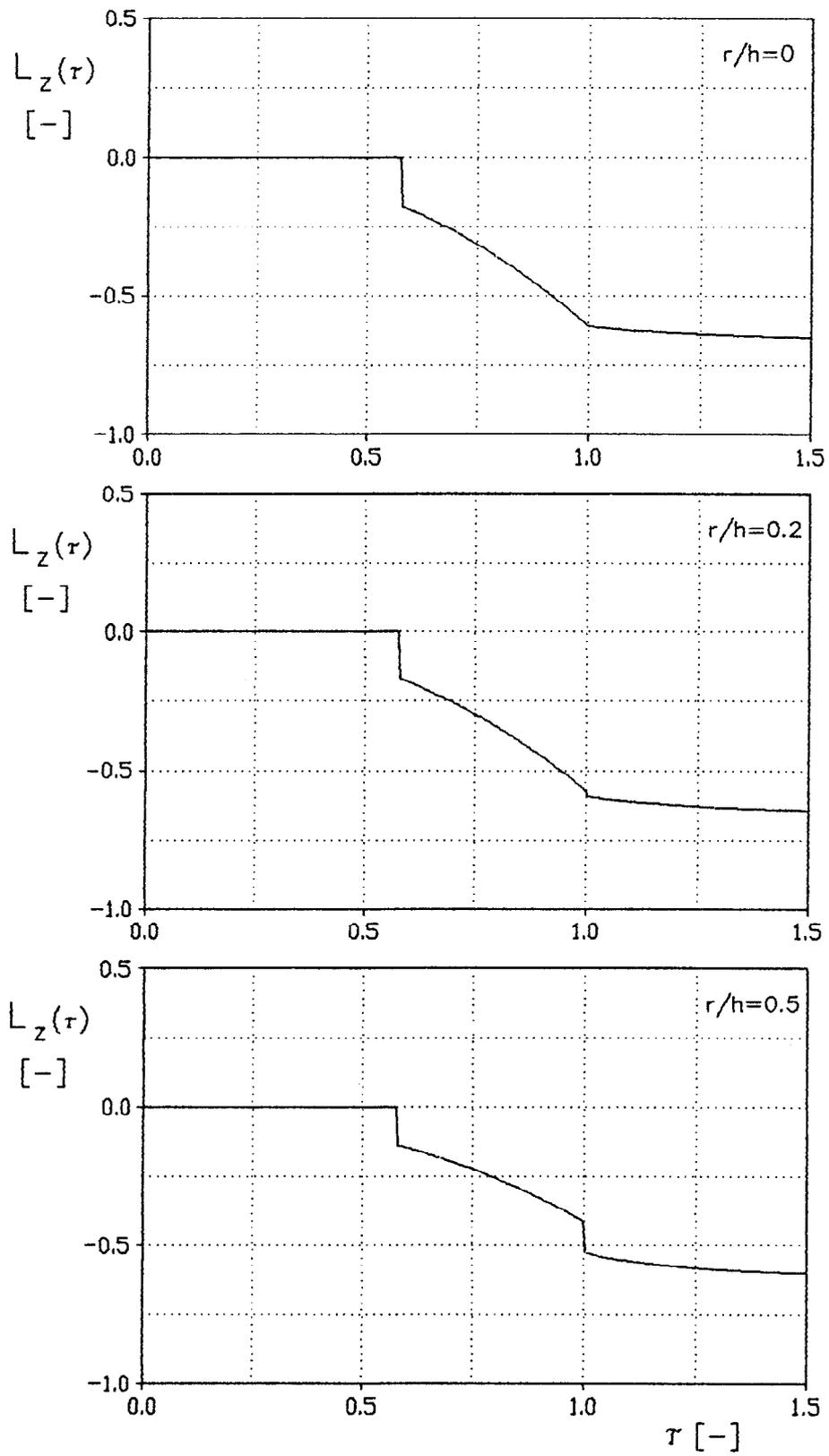
(1-19)

kde

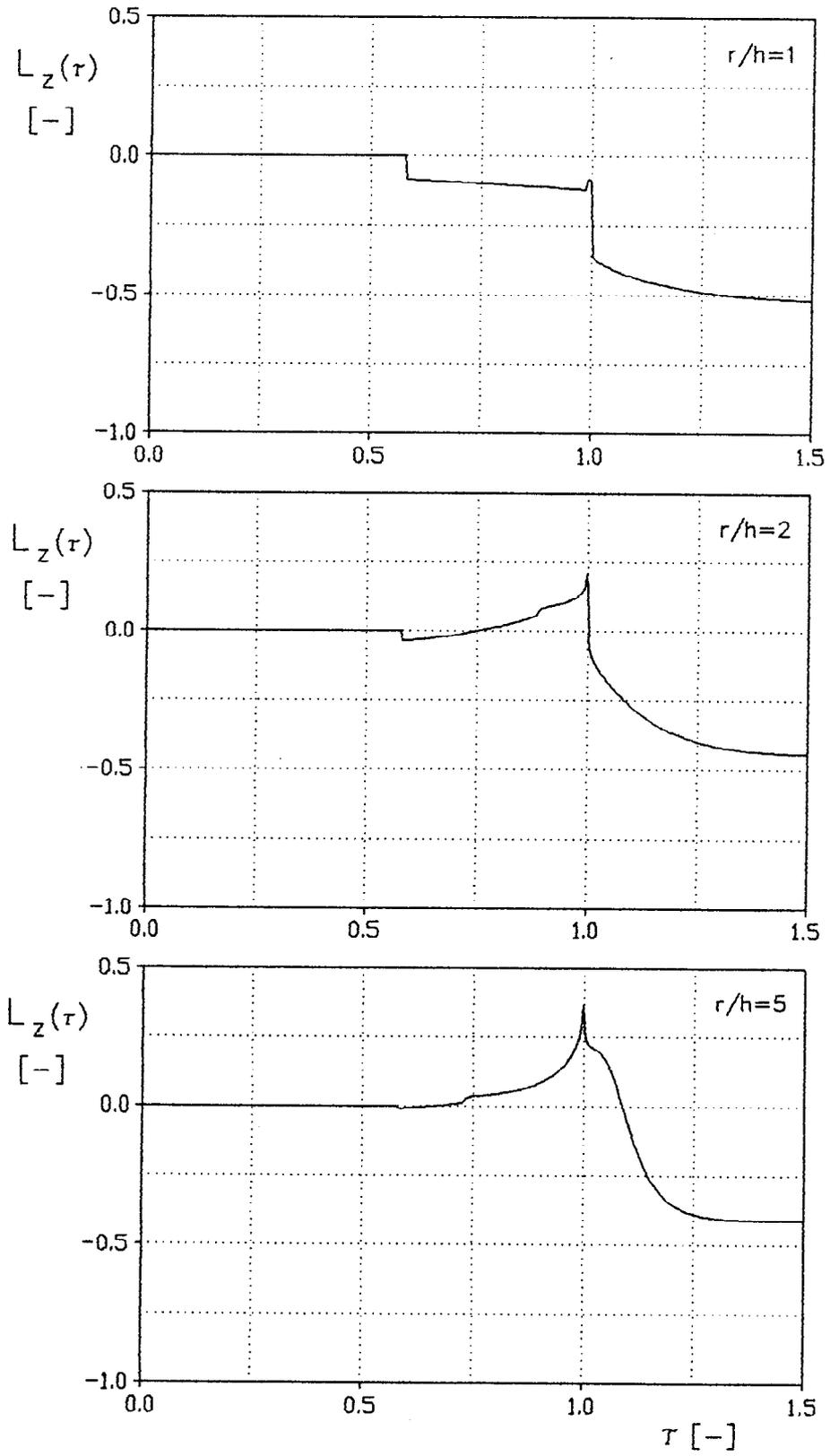
$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - 2/3} \quad x = \sqrt{\beta^2 - 1}$$

$$\beta = q\tau + i \mu \sin \phi \quad \mu = \sqrt{(1 - q^2)(\tau^2 - 1)}$$

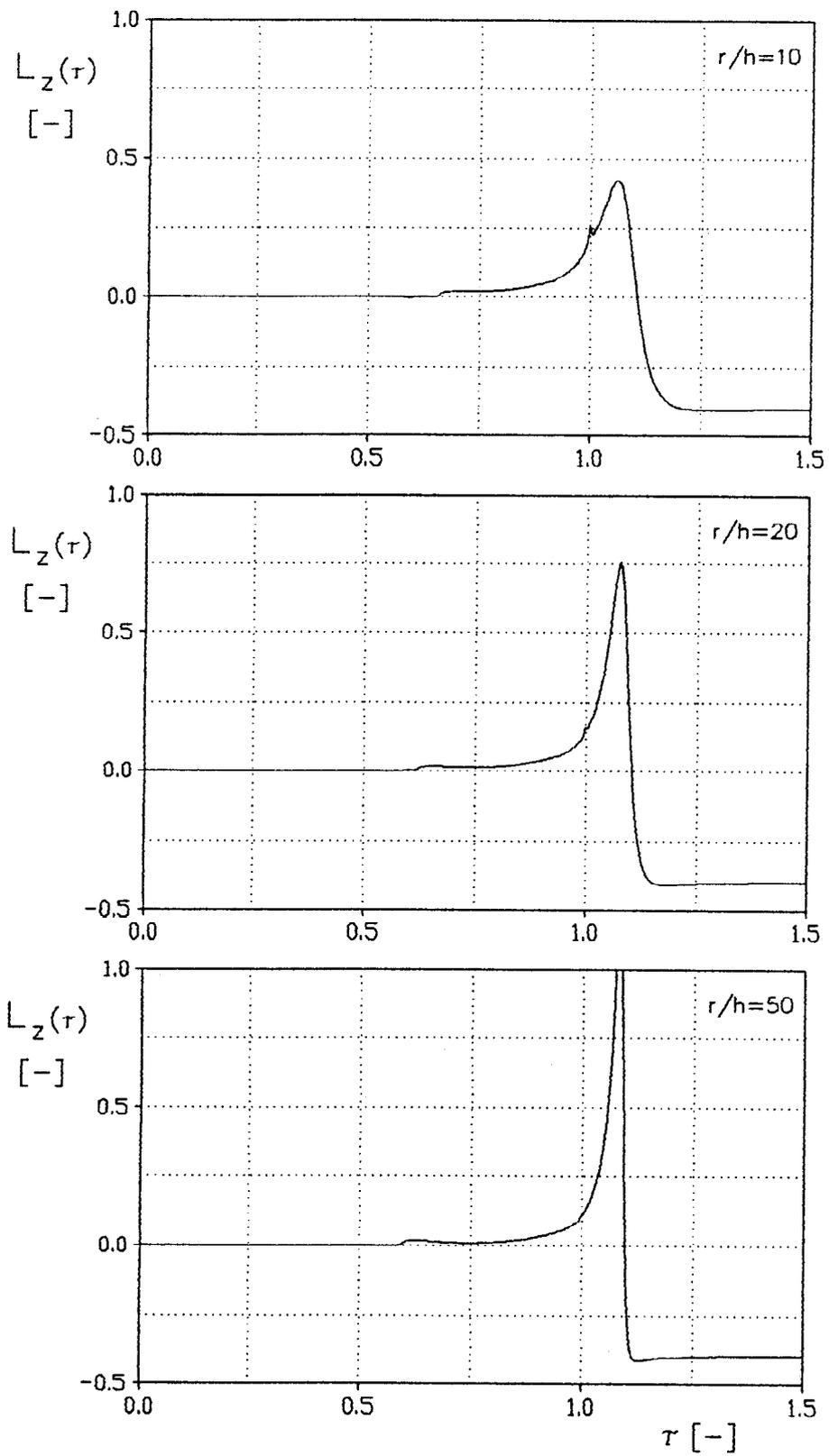
Časové závislosti normované axiální složky vektoru posuvu  $L_z$  na povrchu poloprostoru pro různé hodnoty poměru  $r/h$  při  $\sigma=0,25$  jsou uvedeny na obr.1.11.



Obr.1.11 Závislosti normované axiální složky posuvu



Obr. 1.11 pokračování



Obr. 1.11 pokračování

Diskuse výsledků :

- počáteční amplitudu P-vlny můžeme určit z rovnice (1-15). Dosadíme-li za  $\tau=1/\sqrt{3}$ , čímž  $\nu$  zmizí a integrand je konstantní, dostaneme

$$G_1(1/\sqrt{3}) = \frac{-\pi q^2(1+2q^2)}{6[(1+2q^2)^2 + 4q(1-q^2)(2+q^2)^{1/2}]} \quad (1-20)$$

Z rovnice (1-20) je zřejmé, že P-vlna začíná s konečnou výchylkou a že tato výchylka má stejný směr jako síla ve zdroji. Kdyby byla síla v podpovrchovém zdroji orientována nahoru, směřovaly by počáteční výchylky P-vlny na povrchu též nahoru. Poznamenejme, že jak se zmenšuje hloubka zdroje  $h$  (nebo roste  $r$ ),  $q \rightarrow 0$ , má počáteční výchylka P-vlny sklon jít k nule.

- charakter S-vlny je zcela odlišný pro případ, když  $r < h/\sqrt{2}$ , od případu, kdy  $r > h/\sqrt{2}$ . V prvním případě se příchod S-vlny vyznačuje konečným skokem ve výchylce, kdežto ve druhém případě se S-vlna vyznačuje nekonečným skokem ve výchylce orientované opačně než v prvním případě. Když  $r < h/\sqrt{2}$  a  $\tau=1$ , je  $G_1(\tau)$  spojitě, kdežto  $G_2(\tau)$  začíná s počáteční hodnotou

$$G_2(1) = \frac{-\pi(1-q^2)\sqrt{q^2-2/3}}{3[(2q^2-1)^2 + 4q(1-q^2)(q^2-2/3)^{1/2}]} \quad (1-21)$$

Tuto hodnotu můžeme získat bez integrace z integrálu (1-16), poněvadž, je-li  $\tau=1$ ,  $\mu=0$  a integrand je konstantní.

Když  $r < h/\sqrt{2}$ , je zřejmé, že se příchod S-vlny vyznačuje nespojitostí dolů směřující výchylky. Skok ve vertikální složce v době příchodu S-vlny je ve stejném směru jako u P-vlny.

Je-li  $r > h/\sqrt{2}$ , vyznačuje se S-vlna nekonečným skokem ve výchylce, který je orientován opačně než v případě  $r < h/\sqrt{2}$ . Nekonečný skok se nevyskytuje v případě povrchového pulsu ( $h=0$ ), jak je vidět z obr.1.7.

- v době příchodu SP-vlny ( $\tau=\tau^*$ ) je její amplituda nulová, což kontrastuje s nespojitostmi, kterými se vyznačuje

příchod P nebo S-vlny. Tento slabý začátek můžeme odvozovat ze skutečnosti, že podle paprskové teorie [6] SP-vlna nenesou žádnou energii při svém příchodu, a to se zobrazí v amplitudě pouze jako zlom následující po příchodu SP-vlny. Výchylka následující po příchodu SP-vlny směřuje nahoru. Měli bychom poznamenat, že zřejmá konvergence P a SP období při velkých vzdálenostech na obr.1.11 je způsobena existencí  $\tau$  měřítka, které je použito na ose nezávisle proměnné. Při absolutním časovém měřítku a velkých vzdálenostech se doba zpoždování SP za P-vlnou blíží limitní hodnotě

$$\frac{h}{c_2} \sqrt{2/3} .$$

- Rayleighova povrchová vlna neexistuje v rozsahu  $r < h/\sqrt{2}$ . Při  $r=5h$  se začíná Rayleighova vlna objevovat a při  $r=10h$  je již jasně patrná. Při  $h=0$  nastane případ popsáný v předchozí kapitole (viz obr.1.xx). Amplituda Rayleighových vln na obr.1.11 stoupá se vzrůstající vzdáleností, což je způsobeno tím, že se v rovnici (1-14) používá vnější faktor  $1/R$ , kdežto povrchové vlny ubývají pouze jako  $1/\sqrt{R}$ . Skutečně se dá zjistit, že amplitudy maxim  $L_z$ , vyskytující se v době příchodu Rayleighovy vlny, se s rostoucí vzdáleností zvětšují jako  $\sqrt{R}$ . Křivky uvedené na obr.1.11 znázorňující změnu charakteru výchylek s rostoucí hodnotou  $r/h$  můžeme také považovat za znázornění jevu klesající hloubky  $h$  při konstantní hodnotě  $r$ . Jak zdroj stoupá směrem k povrchu, objevují se vysokofrekvenční složky Rayleighovy vlny v relativně větších amplitudách. Tento jev je zobrazen na obr.1.11, ale v přehnaném měřítku z důvodu kreslení výchylek v normovaném čase  $\tau$  a ne v absolutním čase  $t$ .

- poněvadž zatěžovací síla probíhá podle Heavisideovy jednotkové funkce, existuje pro  $t=\infty$  konečná výchylka. Tato hodnota, kterou můžeme stanovit z rovnice (1-19), je

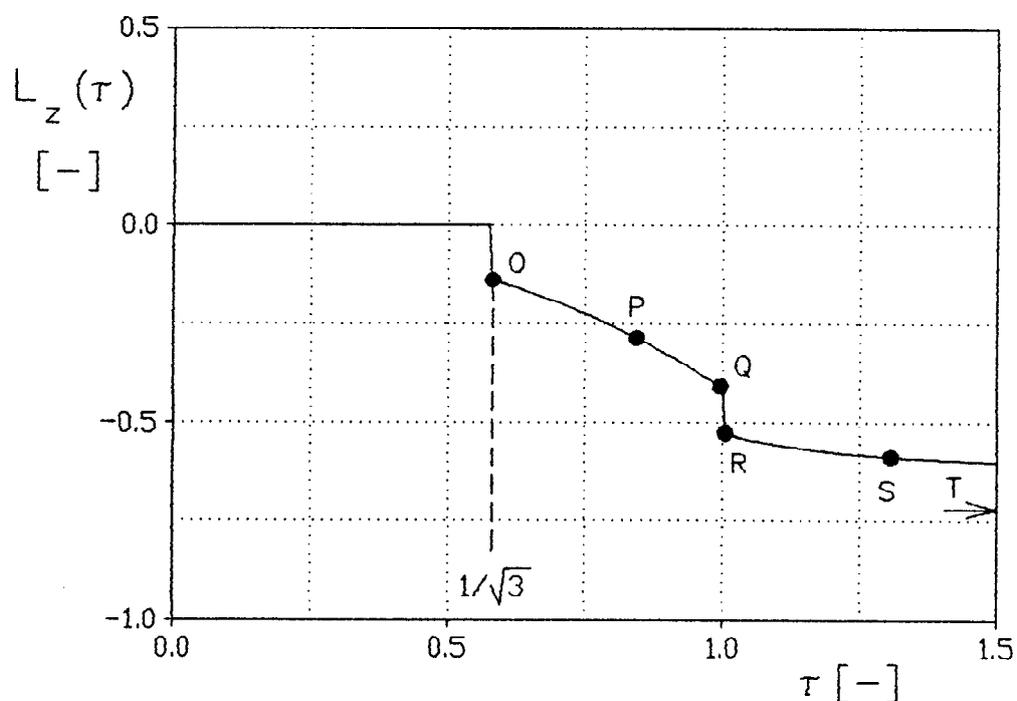
$$L_z(\infty) = - \frac{\pi (3 + 2q^2)}{24}$$



### 1.3.1 Aproximace řešení pro $r < h/\sqrt{2}$

Výpočet podle rovnic (1-14) až (1-19) je již podstatně výhodnější než výpočet podle vztahů (1-2) a (1-3), které byly uvedeny v kapitole 1.1.5, avšak stále zůstává časově náročný. Proto byl proveden pokus nalézt vhodnou aproximaci vztahů pro  $L_z(\tau)$ . Aproximace byla hledána pouze pro řešení při  $r < h/\sqrt{2}$ , neboť při praktických pokusech se stejně jiné případy nevyskytují; nejčastěji se vyskytuje případ  $r=0$  (měření v epicentru).

Typický průběh  $L_z(\tau)$  pro  $r < h/\sqrt{2}$  je znázorněn na obr.1.12.



Obr.1.12 Typický průběh  $L_z(\tau)$  pro  $r < h/\sqrt{2}$

Aproximaci jsme rozdělili do dvou kroků. Zprvė aproximujeme část průběhu v bezrozměrném časovém intervalu  $\langle 1/\sqrt{3}; 1 \rangle$ . Pro tento interval jsme navrhli aproximující funkci  ${}_1L_z^*(\tau)$  ve tvaru

$$L_z^*(\tau) = -A e^{\alpha\tau} - L \quad ,$$

kde  $A, \alpha$  a  $L$  jsou reálná čísla, přičemž  $A, \alpha > 0$ .

Abychom získali konstanty  $A, \alpha$  a  $L$ , musíme sestavit tři rovnice, kterým tyto konstanty vyhovují a které představují průchod aproximující funkce  $L_z^*(\tau)$  třemi důležitými body :

- a) bodem O  $[1/\sqrt{3}; L_z(1/\sqrt{3})]$  ,
- b) bodem P  $[\tau'; L_z(\tau')]$  , (o volbě  $\tau'$  později)
- c) bodem Q  $[1; L_z(1_-)]$  ,

$$\begin{aligned} L_z(1/\sqrt{3}) &= -A e^{\alpha/\sqrt{3}} - L \\ L_z(\tau') &= -A e^{\alpha\tau'} - L \\ L_z(1_-) &= -A e^{\alpha} - L \end{aligned} \quad (1-22)$$

Po odečtení třetí rovnice od první a druhé od první dostaneme tuto soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} L_z(1/\sqrt{3}) - L_z(1_-) &= -A (e^{\alpha/\sqrt{3}} - e^{\alpha}) \\ L_z(1/\sqrt{3}) - L_z(\tau') &= -A (e^{\alpha/\sqrt{3}} - e^{\alpha\tau'}) \end{aligned} \quad (1-23)$$

Po vydělení těchto rovnic dostaneme rovnici

$$\frac{L_z(1/\sqrt{3}) - L_z(1_-)}{L_z(1/\sqrt{3}) - L_z(\tau')} = \frac{e^{\alpha/\sqrt{3}} - e^{\alpha}}{e^{\alpha/\sqrt{3}} - e^{\alpha\tau'}} \quad , \quad (1-24)$$

ze které můžeme vypočítat konstantu  $\alpha$ . Rovnice (1-24) je transcendentní a byla řešena bisekcí (tj. metoda půlení kroku). Dosadíme-li  $\alpha$  do rovnic (1-23), získáme konstantu  $A$  a dosadíme-li  $\alpha$  a  $A$  do rovnic (1-22), získáme i konstantu  $L$ .

Nyní se vraťme k volbě  $\tau'$ . Za  $\tau'$  postupně dosazujeme hodnoty z intervalu  $\langle 1/\sqrt{3}; 1 \rangle$ . Pro každou hodnotu  $\tau'$  vypočítáme konstanty  $A, \alpha, L$  a maximální odchylku

$|L_z(\tau) - {}_{II}L_z^*(\tau)|$  v daném intervalu  $\langle 1/\sqrt{3}; 1 \rangle$ . Potom vybereme minimum z těchto maximálních odchylek a za konečné hodnoty konstant  $A, \alpha, L$  považujeme hodnoty odpovídající tomuto minimálnímu maximu odchylek aproximované a aproximující funkce.

Hodnoty konstant  $A, \alpha, L$  a relativních odchylek jsou pro různé hodnoty  $r/h$  uvedeny v tab.1.3.

$r/h$	$A$	$\alpha$	$L$	$\Delta$ [%]
0.0	0.1530111	1.7108337	-0.2363360	0.683
0.1	0.1492081	1.7156433	-0.2291425	0.674
0.2	0.1384420	1.7267851	-0.2086799	0.260
0.3	0.1228694	1.7497802	-0.1786599	0.602
0.4	0.1039841	1.7779663	-0.1418856	0.520
0.5	0.0846565	1.8071838	-0.1034586	0.407
0.6	0.0663195	1.8345214	-0.0661979	0.243
0.7	0.0500353	1.8529602	-0.0322745	0.054

Tab.1.3 Konstanty  $A, \alpha, L$  v závislosti na  $r/h$ .

Dále aproximujeme část průběhu v bezrozměrném časovém intervalu  $\langle 1; \infty \rangle$ . Pro tento interval jsme navrhli aproximující funkci  ${}_{II}L_z^*(\tau)$  ve tvaru

$${}_{II}L_z^*(\tau) = B e^{-\beta\tau} - K \quad ,$$

kde  $B, \beta$  a  $K$  jsou reálná čísla, přičemž  $B, \beta > 0$ .

Abychom získali konstanty  $B, \beta$  a  $K$ , musíme opět sestavit tři rovnice, které představují průchod aproximující funkce

${}_{II}L_z^*(\tau)$  třemi důležitými body :

- bodem R  $[1; L_z(1_+)]$  ,
- bodem S  $[\tau'; L_z(\tau')]$  , (o volbě  $\tau'$  později)
- bodem T  $[\infty; L_z(\infty)]$  ,

$$\begin{aligned}
L_z(1_+) &= B e^{-\beta} - K \\
L_z(\tau') &= B e^{-\beta\tau'} - K \\
L_z(\infty) &= B e^{-\beta\infty} - K = -K
\end{aligned}
\tag{1-25}$$

Ze třetí rovnice jsme dostali hodnotu konstanty K. Po vydělení první a druhé rovnice obdržíme vztah

$$\frac{L_z(1_+) + K}{L_z(\tau') + K} = e^{-\beta(1-\tau')}
\tag{1-26}$$

ze které můžeme vypočítat konstantu  $\beta$

$$\beta = \frac{1}{\tau' - 1} \ln \frac{L_z(1_+) + K}{L_z(\tau') + K}$$

Dosadíme-li  $\beta$  do rovnic (1-25), získáme konstantu B.

Co se týká volby  $\tau'$ , je podobná té v předchozí části. Za  $\tau'$  postupně dosazujeme hodnoty z intervalu  $\langle 1; 1,5 \rangle$  - hodnota 1,5, jako horní mez intervalu, byla vybrána vzhledem k praktickým měřením, kde není možné jít příliš daleko za hodnotu  $\tau=1$ , neboť dochází k odrazům od stěn zkušební bloku (podrobněji viz kapitola 2). Pro každou hodnotu  $\tau'$  vypočítáme konstanty  $B, \beta, K$  a maximální odchylku  $|L_z(\tau) - L_z^*(\tau)|$  v daném intervalu  $\langle 1; 1,5 \rangle$ . Potom vybereme minimum z těchto maximálních odchylek a za konečné hodnoty konstant  $B, \beta, K$  považujeme hodnoty odpovídající tomuto minimálnímu maximu odchylek aproximované a aproximující funkce.

Hodnoty konstant  $B, \beta, K$  a relativních odchylek jsou pro různé hodnoty  $r/h$  uvedeny v tab.1.4.

r/h	B	$\beta$	K	$\Delta$ [%]
0.0	5.4178353	4.8089727	0.6544984	0.206
0.1	5.7000910	4.8305700	0.6519063	0.207
0.2	6.5926408	4.8926104	0.6444292	0.204
0.3	8.4223636	5.0100552	0.6328820	0.201
0.4	11.8377902	5.1900630	0.6183882	0.197
0.5	21.8775353	5.6168730	0.6021385	0.340
0.6	85.6925129	6.7567409	0.5851986	1.027
0.7	10726.9568449	11.2532219	0.5684033	3.953

Tab.1.4 Konstanty B, $\beta$ ,K v závislosti na r/h.

Z tab.1.3 a tab.1.4 je zřejmé, že konstanty A, $\alpha$ ,L,B, $\beta$ ,K jsou monotónními funkcemi r/h. Naskýtá se nám tudíž možnost jednoduše aproximovat i tyto funkční vztahy. Pro aproximaci jsme použili metodu nejmenších čtverců a za aproximační funkce jsme vzali polynomy

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad \text{kde } x = r/h.$$

Pro aproximaci A, $\alpha$ ,L,K bylo použito polynomu třetího stupně, pro B osmého stupně a pro  $\beta$  sedmého stupně. Polynomů s vyšším stupněm bylo u konstant B a  $\beta$  použito z důvodu značného nárůstu hodnot B a  $\beta$  se stoupajícím r/h. V tab.1.5 resp. tab.1.6 jsou uvedeny hodnoty koeficientů polynomů, které aproximují závislosti A, $\alpha$ ,L resp. B, $\beta$ ,K na r/h.

koeficient	A	$\alpha$	L
$a_0$	0.153071466	1.711730686	-0.236399646
$a_1$	0.000886007	-0.056858945	-0.004390876
$a_2$	-0.435356166	0.806968492	0.834623952
$a_3$	0.320118097	-0.623369925	-0.588797609

Tab.1.5 Koeficienty polynomů aproximujících závislosti A, $\alpha$ ,L na r/h.

koeficient	B	$\beta$	K
$a_0$	5.41521852e0	4.80896930e0	0.654486469
$a_1$	8.61037755e3	3.27977117e0	0.003364517
$a_2$	-2.02161622e5	-7.57690498e1	-0.304874194
$a_3$	1.72750784e6	6.89884028e2	-0.177750512
$a_4$	-6.81450118e6	-2.99445366e3	
$a_5$	1.19872070e7	6.84589597e3	
$a_6$	-3.81155786e6	-7.93593483e3	
$a_7$	-1.36377332e7	3.72389071e3	
$a_8$	1.22162426e7		

Tab.1.6 Koeficienty polynomů aproximujících závislosti  $B, \beta, K$  na  $r/h$ .

Tab.1.7 uvádí maximální relativní odchylky pro jednotlivé hodnoty  $r/h$ , které byly získány porovnáním skutečného průběhu  $L_z(\tau)$  a aproximujících průběhů  $L_z^*(\tau)$  a  $L_{II}^*(\tau)$ , u nichž byly konstanty  $A, \alpha, L, B, \beta, K$  získány pomocí aproximujících polynomů.

$r/h$	$\Delta_I$ [%]	$\Delta_{II}$ [%]
0.0	0.855	0.189
0.1	0.308	0.149
0.2	0.340	0.246
0.3	0.656	1.392
0.4	0.789	3.604
0.5	0.419	7.297
0.6	0.216	12.643
0.7	0.312	18.994

Tab.1.7 Maximální relativní odchylky

### 1.4 Transformační tabulka

V kapitolách 1.2 a 1.3 byly provedeny výpočty vertikální výchylky  $L_z(\tau)$  při skokovém (Heavisidově) průběhu budící síly -  $F(t)=Z \cdot 1(t)$ . Při měření se však mohou vyskytovat situace, které vyžadují měřit rychlosti popřípadě zrychlení a při kterých není použito budící síly ve tvaru skokové funkce, ale budící síly s libovolným průběhem -  $F(t)$ . Vzorce, kterými se převádí jednotlivá řešení jsou uvedeny v tab.1.8.

Transformační tabulka

	BUDÍCÍ SÍLA		
	skoková $F(t)=Z \cdot 1(t)$	impulsní $F(t)=Z \cdot \delta(t)$	libovolná $F(t)$
výchylka	$\mathcal{Z} L_z$	$\mathcal{Z} \frac{c_2}{r} \frac{d L_z}{d\tau}$	$\mathcal{F} \frac{r}{c_2} L'_z$
rychlost	$\mathcal{Z} \frac{c_2}{r} \frac{d L_z}{d\tau}$	$\mathcal{Z} \left(\frac{c_2}{r}\right)^2 \frac{d^2 L_z}{d\tau^2}$	$\mathcal{F} \frac{d L'_z}{d\tau}$
zrychlení	$\mathcal{Z} \left(\frac{c_2}{r}\right)^2 \frac{d^2 L_z}{d\tau^2}$	$\mathcal{Z} \left(\frac{c_2}{r}\right)^3 \frac{d^3 L_z}{d\tau^3}$	$\mathcal{F} \frac{c_2}{r} \frac{d^2 L'_z}{d\tau^2}$

kde při povrchovém buzení

$$\mathcal{Z} = \frac{Z}{\pi^2 \mu r} \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2 \quad \mathcal{F} = \frac{1}{\pi^2 \mu r} \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2$$

$$\tau = \frac{c_2}{r} t \quad L'_z(\tau) = \frac{d}{dt} F(t) \Big|_{t=\frac{r}{c_2} \tau} * L_z(\tau)$$

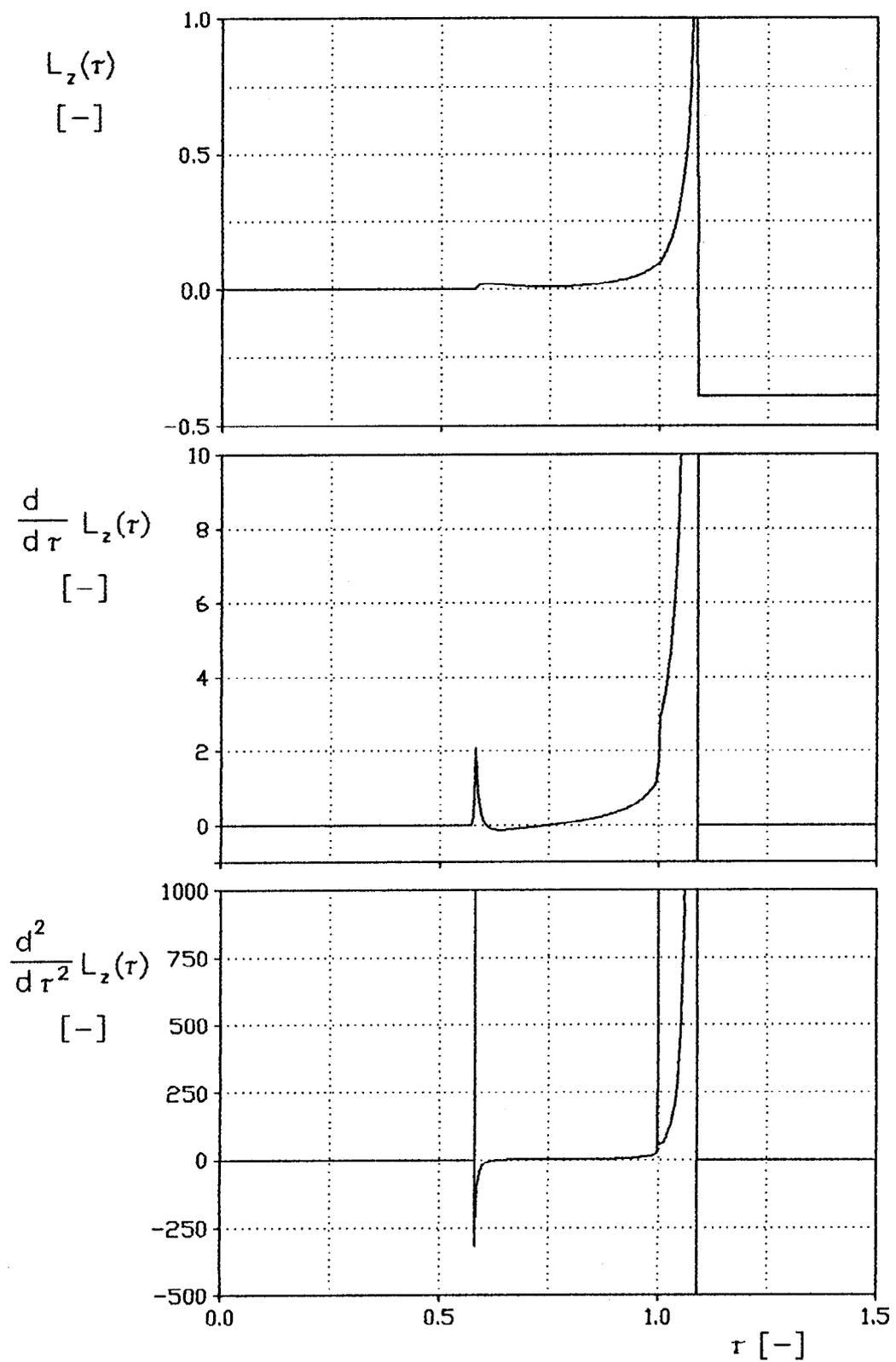
a při podpovrchovém buzení

$$\mathcal{X} = \frac{Z}{\pi^2 \mu R} \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2 \quad \mathcal{F} = \frac{1}{\pi^2 \mu R} \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2$$

$$\tau = \frac{c_2}{R} t \quad L'_z(\tau) = \left. \frac{d}{dt} F(t) \right|_{t=\frac{R}{c_2} \tau} * L_z(\tau)$$

Na obr.1.13 jsou zobrazeny časové průběhy normované výchylky, rychlosti a zrychlení v případě povrchového buzení skokovou silou. Z obrázku i transformační tabulky je patrné, že průběh rychlosti při skokové síle je totožný s průběhem výchylky při impulsní síle a průběh zrychlení při skokové síle je totožný s průběhem rychlosti při impulsní síle.





Obr. 1.13 Časové průběhy výchylky, rychlosti a zrychlení

## 2 Kalibrace snímačů akustické emise

V této kapitole bude uveden přehled kalibračních metod snímačů akustické emise, podrobně bude vyložena impulsní metoda kalibrace včetně podrobného popisu kalibračního zařízení a normálových kónických a cylindrických snímačů akustické emise. V této kapitole se budou používat výsledky, kterých bylo dosaženo v kapitole 1 "Výchyly na povrchu poloprostoru".

### 2.1 Přehled kalibračních metod snímačů akustické emise

V současnosti se používají následující kalibrační metody:

#### - vibrační metoda

Slouží zejména pro kalibraci akcelerometrů. Na vibračním stole je umístěn jak měřený snímač tak snímač standardní. Vibrační stůl, buzený sinusovým generátorem, může pokrýt obor kmitočtů 1Hz až 100 kHz, přičemž praktická horní mez je v důsledku mechanických rezonancí vibračního stolu asi 20 kHz. Výstupní signál cejchovaného snímače se srovnává s výstupem stejně zatěžovaného standardu. Citlivost je dána přímo v pC/g resp. mV/g.

#### - impulsní metoda

Tento postup používá napěťové vlny vybuzené lámáním kapiláry, lámáním tuhy popřípadě pádem kuličky z definované výšky na povrch zkušebního prostředí, kde je umístěn cejchovaný snímač i snímač standardní. Tato metoda umožňuje i absolutní kalibraci. Podrobný popis této metody je uveden v kapitole 2.2.

#### - hydrofonní metoda

V tomto případě se cejchování provádí ve velké nádrži s vodou, kde na jedné straně je umístěn standardní vysílač a na druhé straně standardní snímač. Po proměření přenosu v celém frekvenčním pásmu je namísto standardu umístěn měřený snímač. Cejchovní křivka je získána porovnáním obou měření.

U dané metody je nutno dodržet stejnou geometrii. Běžný rozsah frekvencí je od 1 kHz do 1 MHz.

- ultrazvuková metoda

Tento postup je modifikací předchozího, přičemž vysílač je prostřednictvím viskózního média přímo akusticky spojen se snímačem. Vysílač je buzen sinusovým generátorem, přeladovaným v měřeném frekvenčním pásmu. Jde o poměrně rychlou metodu, která je často používaná.

- metoda náhodného šumu

Tato metoda se snaží modelovat signál akustické emise a reálné podmínky jeho šíření a snímání. Snímač je umístěn na povrchu rozměrného bloku materiálu, na který dopadá proud jemných, tvrdých částic. Jejich dopad vyvolá vznik napěťových vln, které se šíří materiálem a přicházejí na snímač. Signál má charakter šumu se širokým frekvenčním spektrem. Na výstup snímače je připojen frekvenční analyzátor. Závislost amplitudy na frekvenci je pak registrována vhodným způsobem. Způsob získávání impulsů je v dobré shodě se skutečnými poměry při akustické emisi. Jednotlivý ráz částice vcelku dobře imituje bodový zdroj úzkého tranzientního impulsu. Celkový kontinuální proces má pak zcela náhodný charakter.

- metoda jiskrové kalibrace

Tato metoda je modifikací předchozí, přičemž krátké napěťové impulsy jsou vyvolány tlakovou vlnou vznikající při výboji ve vzduchovém jiskřišti. Za předpokladu, že povrchové vlny přicházející na snímač obsahují všechny frekvenční složky se stejnou amplitudou, lze zařazením úzkopásmového filtru na výstupu snímače změřit amplitudy těchto složek a tím získat jeho frekvenční charakteristiku.

## 2.2 Impulsní metoda

Posuzujeme-li vhodnost jednotlivých metod pro kalibrování snímačů se zřetelem k použití pro snímání

signálů akustické emise je zřejmé, že jejich použití je specializováno. Akcelerometry a konvenční ultrazvukové budiče a snímače jsou v současné době cejchovány ověřenými metodami. Tyto metody však nejsou v korelaci se skutečnou akustickou emisí.

Na základě porovnání teoretických i praktických výsledků, lze s ohledem na obor použitelnosti respektovat následující požadavky na kalibrační postup:

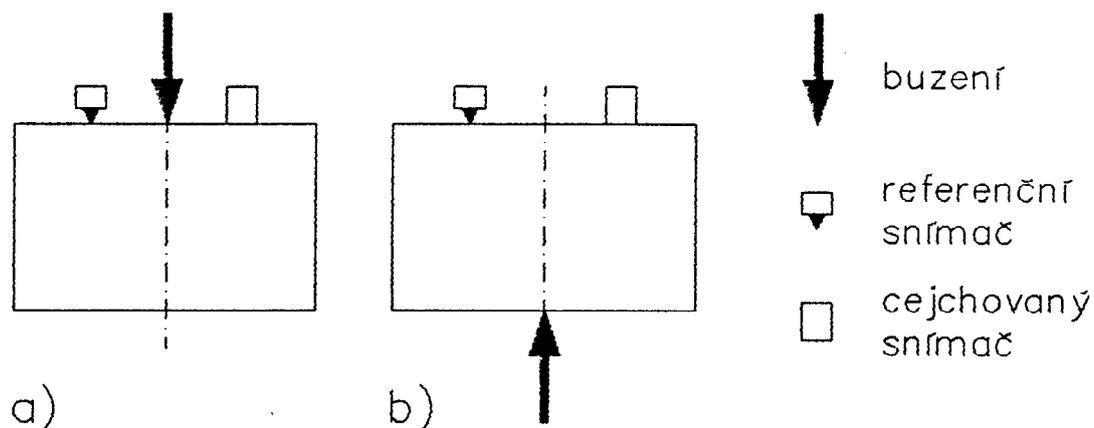
- a) Vstupní kalibrační signál musí mít formu napěťových impulsů s malou amplitudou a krátkou dobou trvání.
- b) Šíření impulsů v kalibračním zařízení musí být podobné reálným podmínkám šíření signálů akustické emise.
- c) Vazební podmínky snímače v zařízení se musí blížit podmínkám při praktické aplikaci.
- d) Zkoušky (kalibrace) musí být reprodukovatelné a přesné s přiměřenou stálou tolerancí.

S ohledem na tyto požadavky je zřejmé, že pro kalibraci snímačů pro akustickou emisi bude v současné době nejlépe vyhovovat impulsní metoda.

Principem impulsní metody je porovnávání signálů získaných ze standardního referenčního snímače a ze snímače cejchovaného. Oba signály jsou podrobeny FFT, navzájem vyděleny a výsledek je vynásoben frekvenční charakteristikou referenčního snímače, tím získáme frekvenční charakteristiku snímače cejchovaného. Signály ze snímačů odpovídají napěťovým vlnám, které jsou vybuzeny lámáním kapiláry, lámáním tuhy popřípadě pádem kuličky na povrch zkušebního prostředí. Zkušební prostředí bývá obvykle ocelový válec o co možná největších radiálních i axiálních rozměrech, které potom zaručují dostatečně dlouhou dobu pro nerušený záznam (tj. bez odrazů) napěťových vln.

Podle toho, zda se nachází snímače a zdroj buzení na jedné podstavě zkušebního válce nebo jsou snímače umístěny na opačné podstavě válce než zdroj buzení, rozeznáváme dva

druhy impulsní kalibrace - kalibrace při povrchovém buzení (obr.2.1a) a kalibrace při podpovrchovém buzení (obr.2.1b).



Obr.2.1 Schéma kalibrace při buzení a) povrchovém, b) podpovrchovém

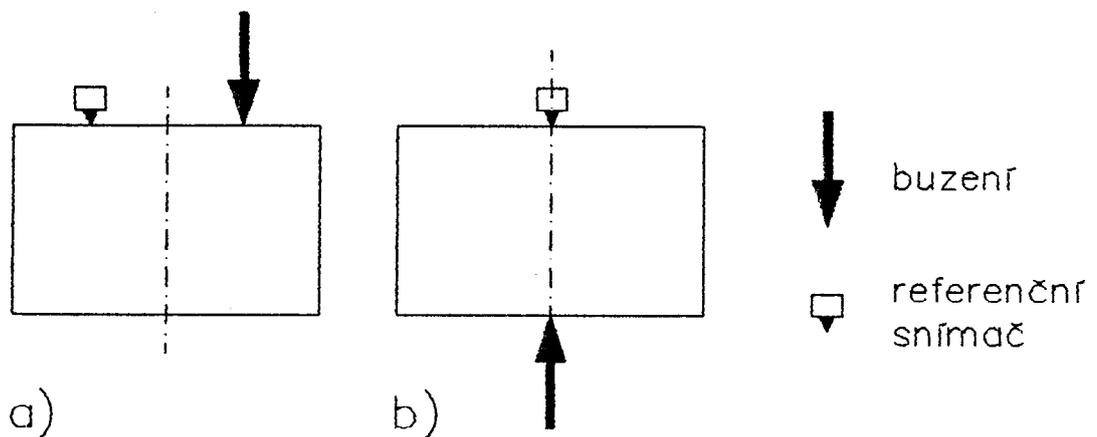
Kalibrace při podpovrchovém buzení není zatížena aperturovým jevem, ale na druhou stranu je u tohoto typu kalibrace úroveň signálu na snímačích přibližně o řád menší než u kalibrace při povrchovém buzení, z čehož vyplývá zhoršení šumových poměrů.

Jako standardní snímač se používá snímač kapacitní nebo snímač s kónickou piezokeramikou. Tyto snímače jsou velice citlivé a mají v širokém frekvenčním pásmu (od desítek kHz do jednotek MHz) vyrovnanou charakteristiku. (V další podkapitole je podrobně popsán kónický snímač, neboť jsme si ho vybrali jako referenční pro impulsní metodu kalibrace.)

Při výpočtu frekvenční charakteristiky cejchovaného snímače jsme předpokládali, že frekvenční charakteristice referenčního snímače je známá. Nyní uvedeme postup, jak zjistit frekvenční charakteristiku referenčního kónického snímače.

Postup kalibrace standardního snímače se opírá o výsledky první kapitoly, kde byly spočítány časové

závislosti axiální složky vektoru posuvu na povrchu poloprostoru při povrchovém i podpovrchovém buzení skokovou funkcí síly. Budeme-li tedy budit poloprostor, který je v našem případě reprezentován rozměrným ocelovým válcem, skokovou silou, můžeme porovnávat signál z kónického snímače s průběhy uvedenými v první kapitole a tím získat frekvenční charakteristiku referenčního kónického snímače. Opět můžeme použít povrchové (obr.2.2a) nebo podpovrchové buzení (obr.2.2b). Výsledky této kalibrace i kalibrací klasických snímačů impulsní metodou jsou uvedeny v kap.2.5.



Obr.2.2 Schéma kalibrace referenčního snímače



velkého povrchu, na kterém se měří vertikální složka výchylky;

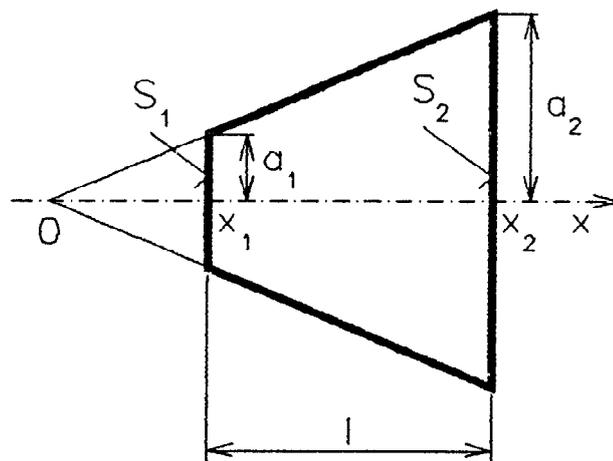
4) výstupní napětí se měří mezi mosazným válcovým zakončovacím blokem a povrchem, na kterém je snímač umístěn, a je měřeno naprázdno.

Nyní se pokusíme navrhnout náhradní schéma kónického snímače a vypočítat frekvenční charakteristiku snímače z geometrických rozměrů a materiálových konstant aktivního prvku a zakončovacích impedancí.

Při návrhu náhradního schématu snímače vyjdeme z impedanční matice kónického divergentního vlnovodu (viz obr.2.4) v pevné fázi [12,22]

$$Z_m = \begin{bmatrix} \rho c S_1 \left( \frac{\cotg(kl)}{j} + \frac{1}{j k x_1} \right) & ; & -\rho c \sqrt{S_1 S_2} \frac{1}{j \sin(kl)} \\ \rho c \sqrt{S_1 S_2} \frac{1}{j \sin(kl)} & ; & -\rho c S_2 \left( \frac{\cotg(kl)}{j} - \frac{1}{j k x_2} \right) \end{bmatrix}$$

Tato impedanční matice byla odvozena za předpokladu, že řezy kolmé na osu vlnovodu zůstávají při deformaci rovinné, osové napětí je rovnoměrně rozloženo po průřezu a radiální posuvy jsou zanedbány.

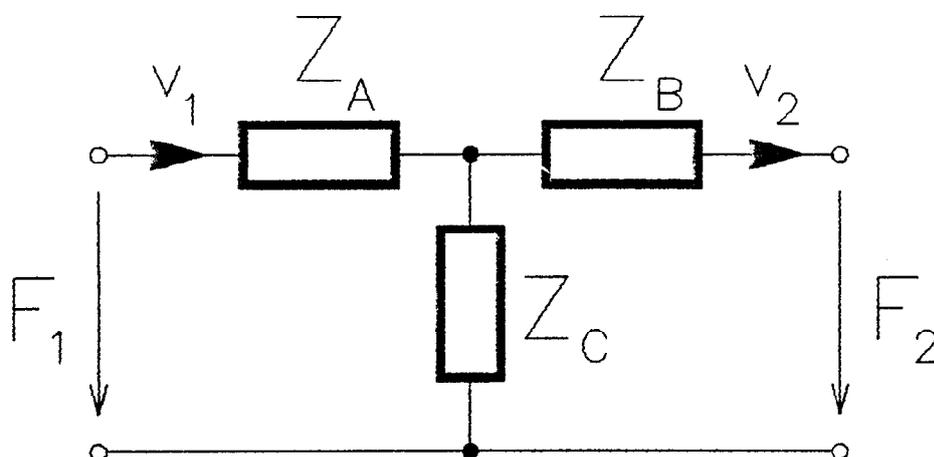


Obr.2.4 Kónický divergentní vlnovod



Porovnáme-li tento vztah s impedanční maticí T-článku na obr.2.5

$$Z_T = \begin{bmatrix} Z_A + Z_C & -Z_C \\ Z_C & -Z_B - Z_C \end{bmatrix} ,$$



Obr.2.5 T-článek

dostaneme pro  $Z_A, Z_B$  a  $Z_C$  následující vztahy

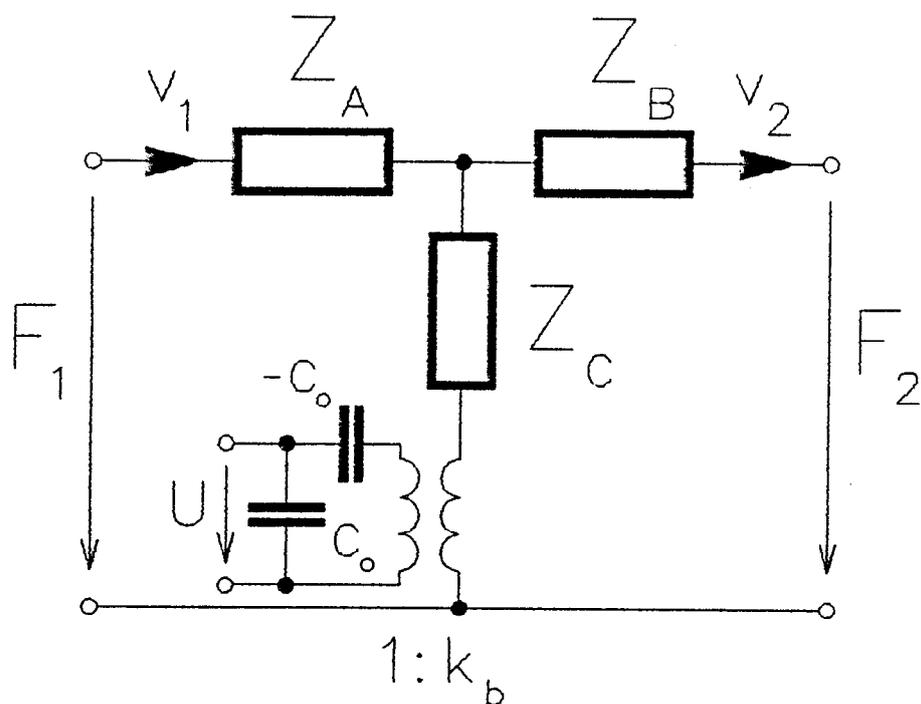
$$Z_A = \rho c S_1 \left[ \frac{\cotg(kl)}{j} + \frac{1}{j k x_1} - \frac{r}{j \sin(kl)} \right] , \quad (2-1)$$

$$Z_B = \rho c S_2 \left[ \frac{\cotg(kl)}{j} - \frac{1}{j k x_2} - \frac{1/r}{j \sin(kl)} \right] , \quad (2-2)$$

$$Z_C = \rho c \sqrt{S_1 S_2} \frac{1}{j \sin(kl)} , \quad (2-3)$$

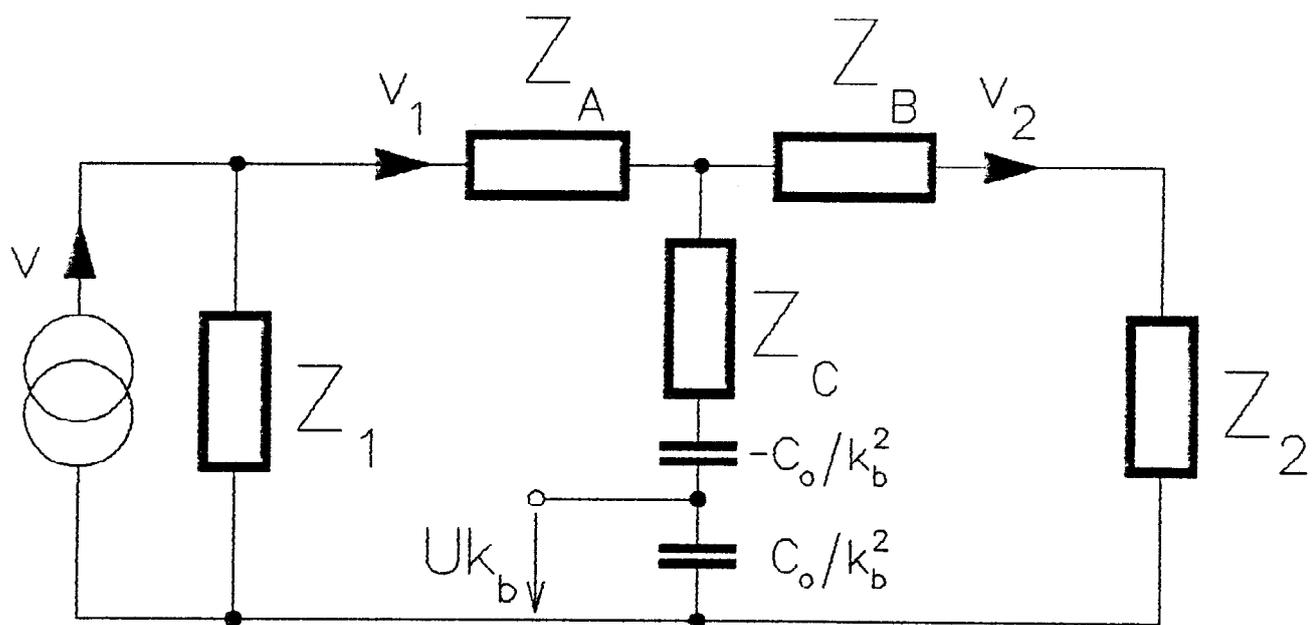
kde  $r = x_2 / x_1$ .

Doplňme-li tento T-článek Masonovým modelem, dostaneme náhradní schéma piezoelektrického elementu ve tvaru kuželu (viz obr.2.6).



Obr.2.6 Náhradní schéma kónického piezoelektrického elementu

Převédeme-li elektrickou část na stranu mechanickou a doplníme-li impedanci zdroje  $Z_1$  a zatěžovací impedanci  $Z_2$  (viz Nortonův teorém - rychlost nakrátko + paralelně připojená impedance zdroje  $Z_1$ ), dostaneme náhradní schéma kónického snímače, které je zobrazeno na obr.2.7. Poznamenejme, že  $v$ ,  $v_1$  a  $v_2$  jsou smyčkové - ne větrové - rychlosti, např. rychlost na  $Z_C$  je  $v_1 - v_2$ .



Obr.2.7 Náhradní schéma kónického snímače

Pro obvod na obr.2.7 platí

$$v_1 - v_2 = v F, \quad (2-4)$$

kde

$$F = \frac{Z_1 (Z_B + Z_2)}{(Z_A + Z_1 + Z_C)(Z_B + Z_2 + Z_C) - Z_C^2} \quad (2-5)$$

a

$$U_{k_B} = \frac{v_1 - v_2}{j\omega C_0/k_b^2} \quad (2-6)$$

Dosadíme-li do rovnice (2-6) za  $v_1 - v_2$  z rovnice (2-4),

dostaneme

$$U k_b = \frac{v}{j\omega} \frac{k_b^2}{C_o} F$$

Dosadíme-li dále  $\xi = v/j\omega$  a  $-p_{33} = k_b/C_o$ , dostaneme

$$U/\xi = -p_{33} F,$$

což je výsledný vztah pro citlivost kónického snímače.

Hodnota  $p_{33}$  leží mezi  $h_{33}$  (disk) a  $g_{33}/s_{33}^D$  (tyčinka).

$h_{33}$  je piezoelektrická konstanta (pro výpočet byla použita hodnota  $21,5 \cdot 10^8$  V/m),

$g_{33}$  je piezoelektrická konstanta (pro výpočet byla použita hodnota  $24,9 \cdot 10^{-3}$  Vm/N) a

$s_{33}^D$  je konstanta poddajnosti při  $D=0$  (pro výpočet byla použita hodnota  $9,46 \cdot 10^{-12}$  m<sup>2</sup>/N).

Když dosadíme do vztahu (2-5) za jednotlivé impedance vztahy (2-1) až (2-3), dostaneme pro čitatel a jmenovatel F

$$\check{C}_F = z_1 \left[ z_2 + i \left( \frac{1}{r \sin(kl)} + \frac{r-1}{rkl} - \cotg(kl) \right) \right] \quad (2-7)$$

a

$$J_F = 1 + z_1 z_2 + \frac{(r-1)^2}{r(kl)^2} - \frac{(r-1)^2}{rkl} \cotg(kl) + \quad (2-8)$$

$$+ i \left[ z_1 \left( \frac{r-1}{rkl} - \cotg(kl) \right) - z_2 \left( \frac{r-1}{kl} + \cotg(kl) \right) \right].$$

Zde  $z_1$  a  $z_2$  jsou normované specifické impedance  $Z_1/\rho c S_1$  a  $Z_2/\rho c S_2$  (normuje se k  $\rho c$  kónusu!).

V případě cylindrického snímače,  $r=1$ , dostáváme pro F

$$F = \frac{z_1 [z_2 + i \tg(kl/2)]}{1 + z_1 z_2 - i(z_1 + z_2) \cotg(kl)} \quad (2-9)$$

Jestliže se  $kl$  rovná lichým násobkům  $\pi$ , čitatel i jmenovatel rovnice (2-9) je nekonečný, avšak poměr je konečný; je-li však  $kl$  rovno sudým násobkům  $\pi$ , tj. délka  $l$  je rovna celočíselnému násobku vlnové délky, jmenovatel je nekonečný pro libovolnou hodnotu  $z_1$  a  $z_2$ , a tudíž  $F$  a citlivost  $U/\xi$  jsou nulové. V případě kónusu udržuje výraz  $1/(r \sin(kl))$  ( $r > 1$ ) v rovnici (2-7) zlomek  $F$  konečný, tak že místo nul v charakteristice existují pouze minima. Proto má kónický snímač lepší předpoklady pro přijatelně rovnou širokopásmovou charakteristiku než snímač cylindrický.

Nyní nám zbývá zjistit hodnoty impedancí  $Z_1$  a  $Z_2$ . V praxi jsou signály snímané kónickým snímačem tak krátké, že jak pozorovaná těleso tak zakončovací blok mohou být považovány za poloprostory. Problém impedance poloprostoru, jak se jeví v kruhové ploše o poloměru  $a$  na povrchu poloprostoru, byl řešen v [7]. V této práci byl odvozen přibližný výraz pro vstupní impedanci poloprostoru ve tvaru

$$Z = \frac{S_0 c_1}{g + ib} \quad , \quad (2-10)$$

kde

$$g = 1 + 2/x_1 (1 - 3y_1/x_1) \frac{\sin(kax_1)}{ka} - 6/x_1^2 (1 - 2y_1/x_1) \frac{1 - \cos(kax_1)}{(ka)^2} \quad (2-11)$$

a

$$b = 2/x_1 (2 - 3y_1/x_1) \frac{1}{ka} + 2/x_1 (1 - 3y_1/x_1) \frac{\cos(kax_1)}{ka} - 6/x_1^2 (1 - 2y_1/x_1) \frac{\sin(kax_1)}{(ka)^2} \quad , \quad (2-12)$$

kde

$$k = \frac{\omega}{c_1} ,$$

$S$  je plocha kruhové plošky o poloměru  $a$ ,

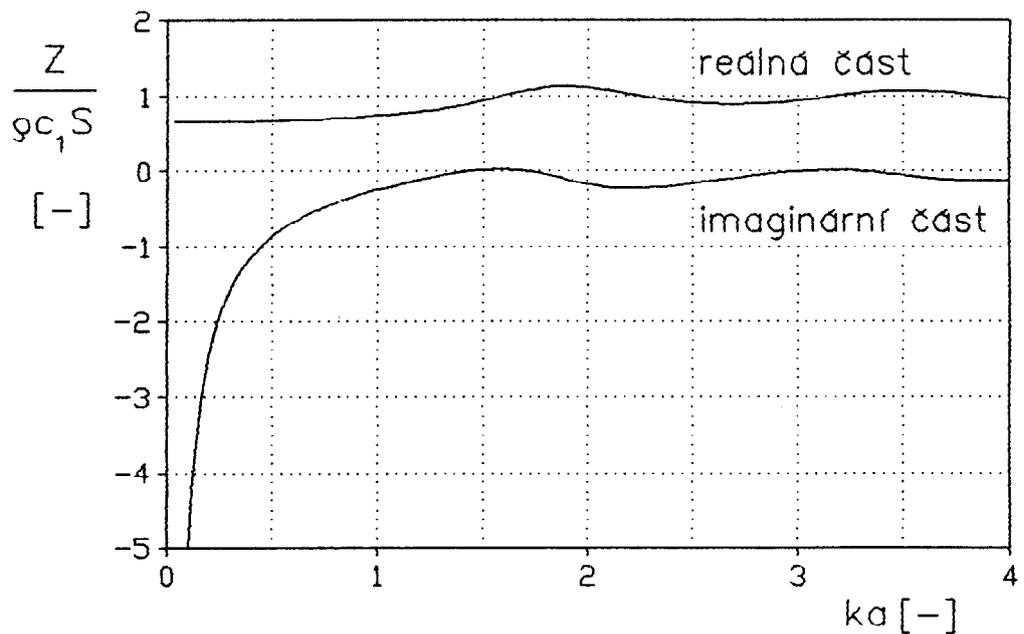
$y_1, x_1$  jsou bezrozměrné parametry, pro které platí

$$y_1 = \frac{16}{3\pi} \frac{(1 - \sigma)^2}{(1 - 2\sigma)}$$

$$x_1 = 2 \frac{c_1}{c_R} = 2 \sqrt{\frac{2(1 - \sigma)}{1 - 2\sigma}} y_1 .$$

V tab.2.1 jsou uvedeny hodnoty  $\gamma, x_1, y_1$  pro různé hodnoty Poissonova čísla  $\sigma$ .

Obr.2.8 znázorňuje reálnou a imaginární část specifické impedance  $1/(g + ib)$  normované k  $\rho c_1 S$  materiálu poloprostoru (ocel).



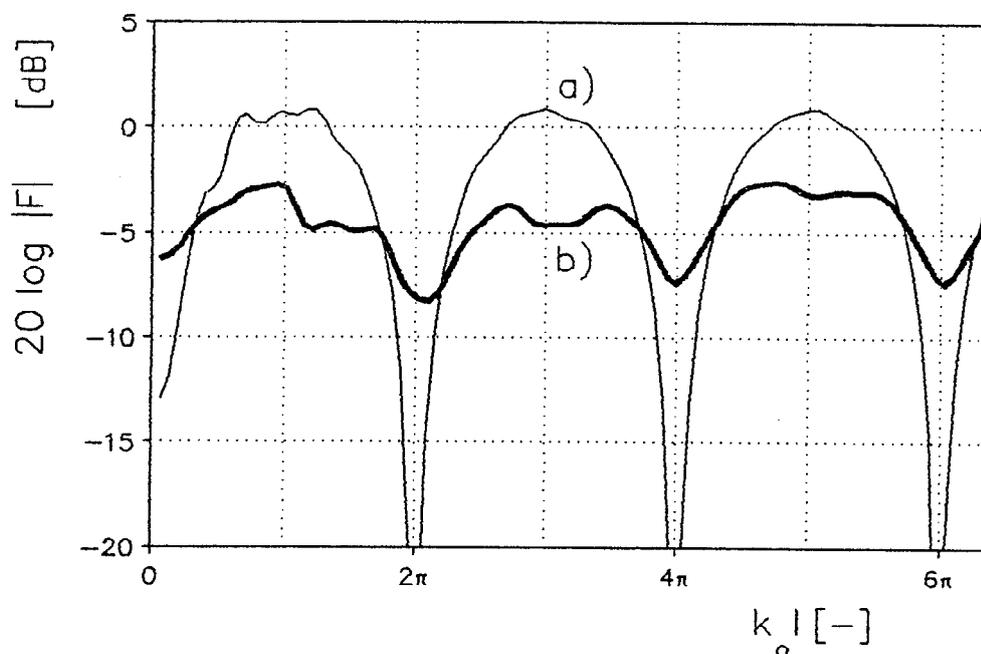
Obr.2.8 Závislost normované specifické impedance  $1/(g + ib)$  na  $ka$

$\sigma$	$\gamma$	$x_1$	$y_1$
0.01	1.14158	3.24530	1.69783
0.03	1.13655	3.26554	1.69928
0.05	1.13161	3.28839	1.70237
0.07	1.12677	3.31415	1.70733
0.09	1.12202	3.34319	1.71442
0.11	1.11738	3.37592	1.72399
0.13	1.11283	3.41284	1.73642
0.15	1.10838	3.45456	1.75222
0.17	1.10403	3.50181	1.77199
0.19	1.09978	3.55549	1.79650
0.21	1.09564	3.61670	1.82673
0.23	1.09160	3.68687	1.86396
0.25	1.08766	3.76778	1.90986
0.27	1.08383	3.86179	1.96669
0.29	1.08010	3.97203	2.03759
0.31	1.07647	4.10278	2.12698
0.33	1.07294	4.26007	2.24140
0.35	1.06950	4.45270	2.39086
0.37	1.06617	4.69413	2.59153
0.39	1.06293	5.00616	2.87135
0.41	1.05979	5.42694	3.28307
0.43	1.05674	6.03098	3.93977
0.45	1.05379	6.99002	5.13540
0.47	1.05092	8.83438	7.94784
0.49	1.04814	14.97038	22.07797

Tab.2.1 Tabulka hodnot  $\gamma$ ,  $x_1$ ,  $y_1$  v závislosti na  $\sigma$ .

Zlomek  $F$  z rovnic (2-4) a (2-5) může být nyní vypočítán substitucí impedancí z rovnic (2-10) až (2-12) do rovnic (2-7) a (2-8). Rychlost  $\underline{c}$  v kónické části je v prvním přiblížení brána jako rychlost v tenké tyči  $c_0$ , která je

nezávislá na frekvenci. Na obr.2.9 jsou zobrazeny závislosti modulu  $|F|$  na  $k_l$  jednak pro cylindrický snímač ( $a_1=a_2=1,5\text{mm}$  a  $l=1\text{mm}$ ) a jednak pro kónický snímač ( $a_1=0,5\text{mm}$ ,  $a_2=2,4\text{mm}$  a  $l=2,5\text{mm}$ ). Pro cylindrický snímač jde charakteristika k nule při  $k_l=2\pi, 4\pi$ , atd., jak jsme očekávali, ale kónický snímač má v těchto místech pouze minima.



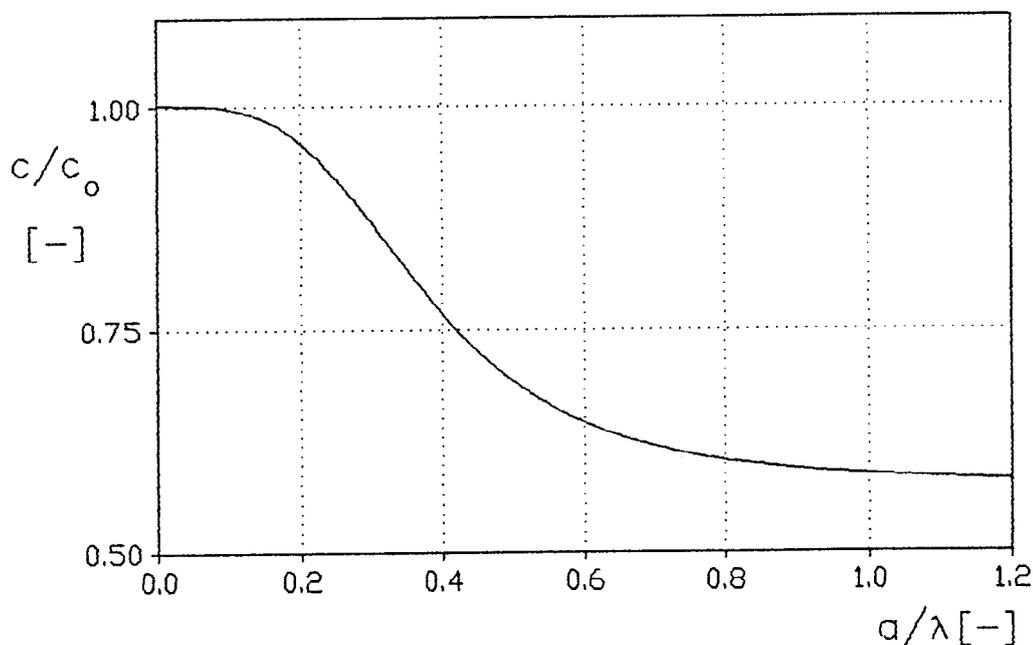
Obr.2.9 Závislosti modulu  $|F|$  na  $k_l$  pro  
 a) cylindrický snímač ( $a_1=a_2=1,5\text{mm}$  a  $l=1\text{mm}$ )  
 b) kónický snímač ( $a_1=0,5\text{mm}$ ,  $a_2=2,4\text{mm}$  a  $l=2,5\text{mm}$ )

Abychom se modelem přiblížili co nejvíce reálnému snímači, potřebujeme nahradit rychlost  $c_0$  něčím více realističtějším. U cylindrického snímače použijeme známý Pochhammerův disperzní vztah pro fázovou rychlost ve válcové tyči v závislosti na frekvenci. Pro kónický snímač žádná podobná korekce není přesně známa. Při výpočtu bylo použito aproximace disperzní závislosti (obr.2.10), která je uvedena v [9]



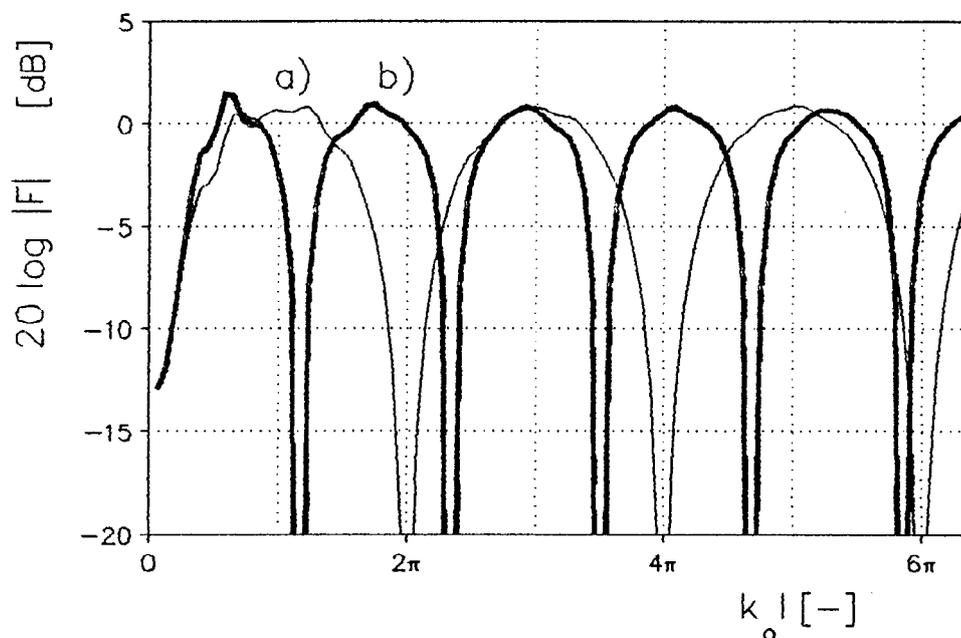
$$\frac{c}{c_0} \approx \frac{0,0686\sigma^{1,2162}}{\left(\frac{a}{\lambda}\right) \frac{1}{0,144+0,5017\sigma} + 0,1443\sigma^{1,1372}} + 0,6124 - 0,1432\sigma$$

kde  $\sigma$  je Poissonovo číslo,  
 $a$  je poloměr tyče a  
 $\lambda$  je vlnová délka.



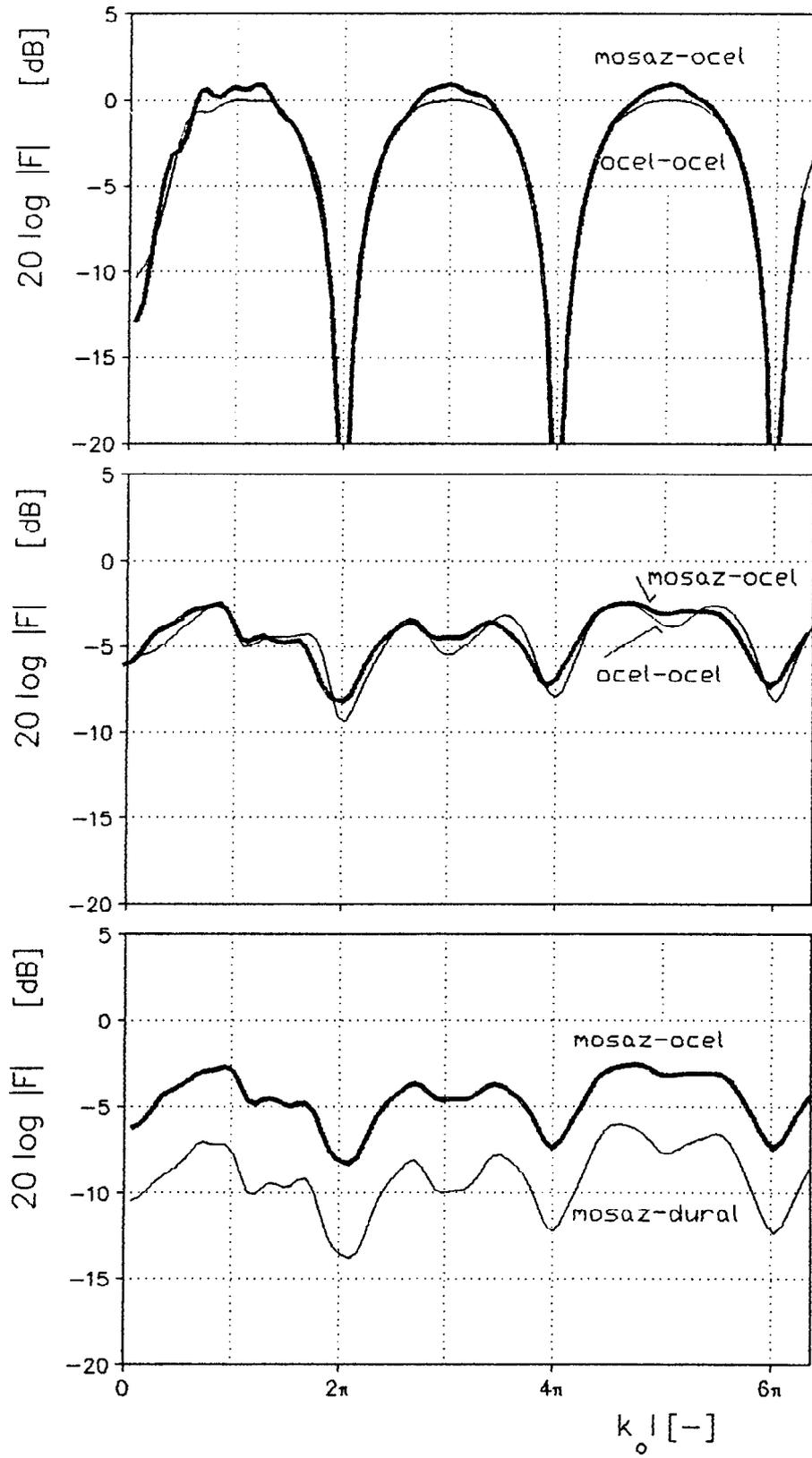
Obr.2.10 Aproximace disperzní závislost fázové rychlosti na vlnové délce podle [9]

Na obr.2.11 jsou zobrazeny závislosti modulu  $|F|$  na  $k_l$  pro cylindrický snímač ( $a_1=a_2=1,5\text{mm}$  a  $l=1\text{mm}$ ) bez přesného Pochhammerova řešení pro válcovou tyč a s přesným Pochhammerovým řešením.



Obr.2.11 Závislosti modulu  $|F|$  na  $k_l$  pro cylindrický snímač  
 a) bez korekce  
 b) s Pochhammerovou korekcí rychlosti.

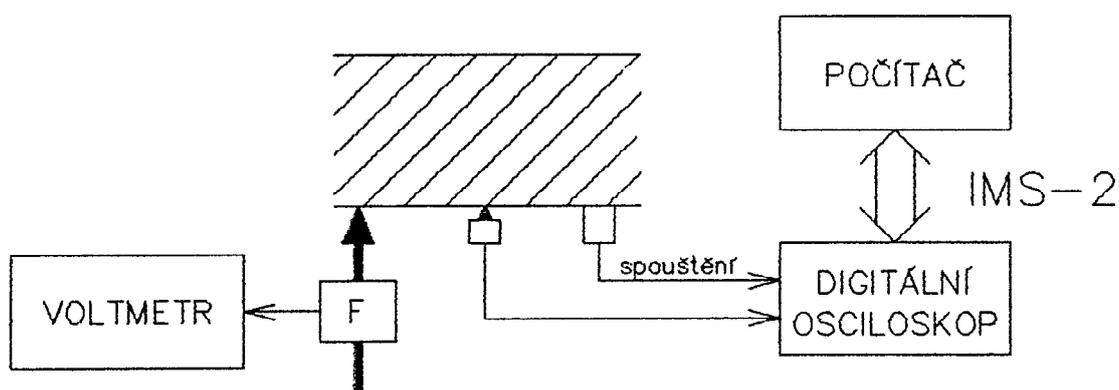
Nyní si všimneme vlivu materiálu zatěžovací impedance a zdrojové impedance. Pro cylindrický snímač je materiál zakončovací impedance stejně důležitý jako materiál zdroje, ale např. pro kónický snímač, který má  $r=a_2/a_1=5$ , takže poměr ploch je 25, bude zatěžovací impedance  $Z_2$  relativně nedůležitá. Tyto představy jsou znázorněny na obr.2.12. Obr.2.12a znázorňuje závislost modulu  $|F|$  na  $k_l$  cylindrického snímače pro dva různé materiály zakončovacího bloku, ale stejný materiál zdroje, a obr.2.12b je stejný, ale pro kónický snímač s  $r=5$ . Je evidentní, jak velkou roli hraje materiál zakončovacího bloku u cylindrického snímače oproti kónickému a to je další výhoda kónického snímače oproti cylindrickému. Obr.2.12c znázorňuje charakteristiky stejného kónického snímače s mosazným zakončovacím blokem, ale pro různé materiály zdroje. Vliv je zřetelný, jak bylo očekáváno, a zdůrazňuje, co je snad samozřejmé, že snímač musí být kalibrován na materiálu, se kterým bude používán.



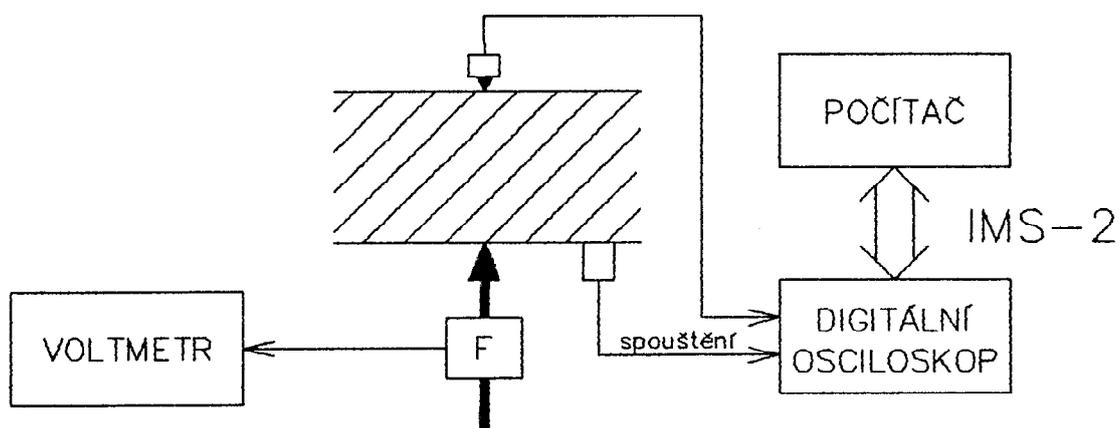
Obr. 2.12

## 2.4 Měřicí aparatura

Schéma zařízení pro kalibraci referenčního kónického snímače při povrchovém a podpovrchovém buzení je znázorněno na obr.2.13a) a obr.2.13b). V obrázcích není zakresleno podpěrné zařízení, neboť schéma by pak bylo nepřehledné. Konkrétní konstrukce podpěrného zařízení bude probrána o něco později.

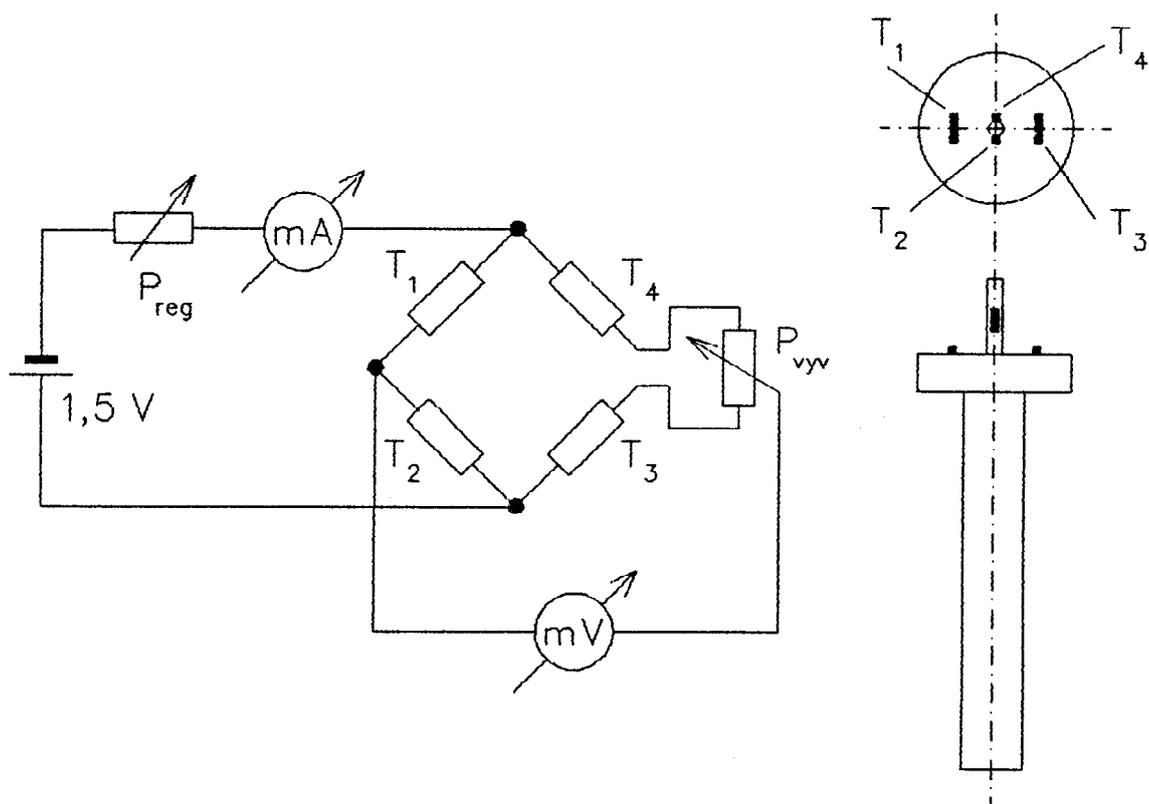


Obr.2.13a Schéma zařízení pro kalibraci kónického snímače při povrchovém buzení



Obr.2.13b Schéma zařízení pro kalibraci kónického snímače při podpovrchovém buzení

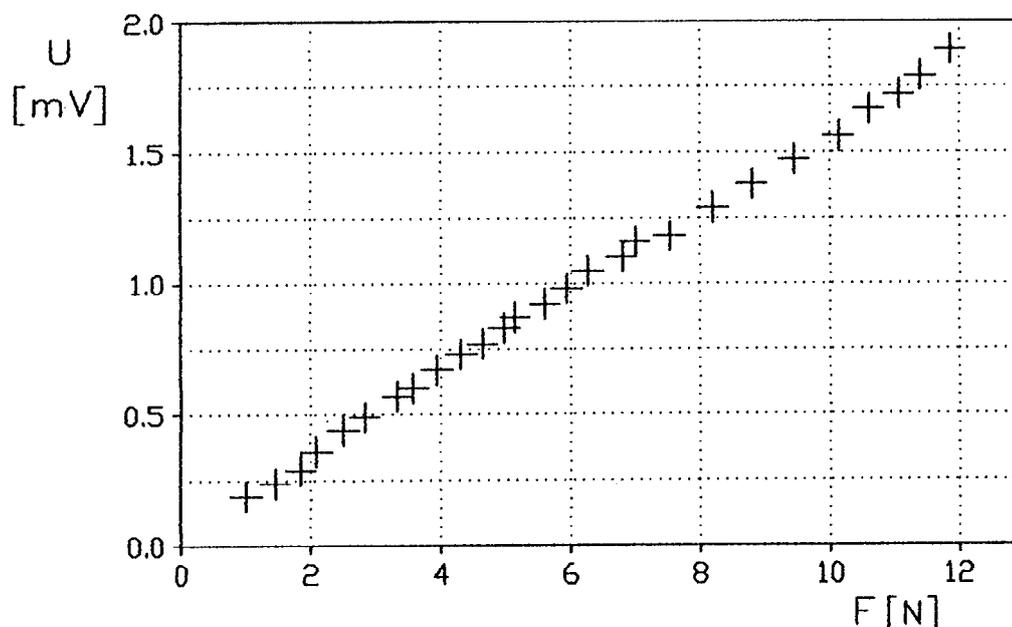
Pod blokem, který je ve schématech označen F , se skrývá zařízení pro měření síly při zlomu tenké skleněné kapiláry. Údaj o celkové síle při zlomu kapiláry je nezbytný pro absolutní kalibraci snímačů. Zařízení pro měření síly sestává z tenzometrického můstku, který je natmelen na duralovém mezičlánku, vyvažování a voltmetru. Podrobné schéma bloku F je zobrazeno na obr.2.14.



Obr.2.14 Podrobné schéma bloku F

Použité tenzometry jsou polovodičové. Dva tenzometry ( $T_2, T_4$ ) jsou natmeleny na tenké tyčce mezičlánku, která slouží k rozdrčení kapiláry, a další dva tenzometry ( $T_1, T_3$ ) jsou natmeleny na rozšířené části mezičlánku a slouží pro teplotní kompenzaci.

Můstek je napájen ze zdroje 1,5V. Výstupní napětí můstku, které dosahuje jednotek mV, bylo měřeno voltmetrem KIESLEY. Před měřením se nastaví reostatem  $R_r$  proud do tenzometrického můstku na hodnotu 5mA a nezatížený můstek se vyváží potenciometrem  $P_v$  na nulu. Dále se provede ocejchování můstku zatěžováním známými silami. Po skončení celého měření bylo cejchování vždy zopakováno, jestli nedošlo ke změně parametrů tenzometrického můstku. Výsledky jednoho cejchování můstku jsou zobrazeny na obr.2.15. Rozptyl hodnot jednotlivých cejchování byl značný (až 30 %), neboť tenzometry byly v našem případě použity pro měření velice malých sil (5-15 N), tudíž na výstupu můstku bylo velice malé napětí, a navíc tenzometry, natmelené na tenké tyčce mezičládku, ( $T_2, T_4$ ) byly citlivé i na ohyb.



Obr.2.15 Cejchovní křivka tenzometrického můstku

Kapiláry použité pro generování budící síly ve tvaru skokové funkce mají pro správnou funkci kalibračního zařízení klíčový význam. Námi použité kapiláry byly z

křemenného skla a měly vnější průměr  $100\mu\text{m}$  a vnitřní  $50\mu\text{m}$ . Při jedněch z prvních pokusů o kalibraci jsme používali skleněné kapiláry o vnějším průměru  $1\text{mm}$ , které nebyly téměř použitelné, neboť praskaly postupně.

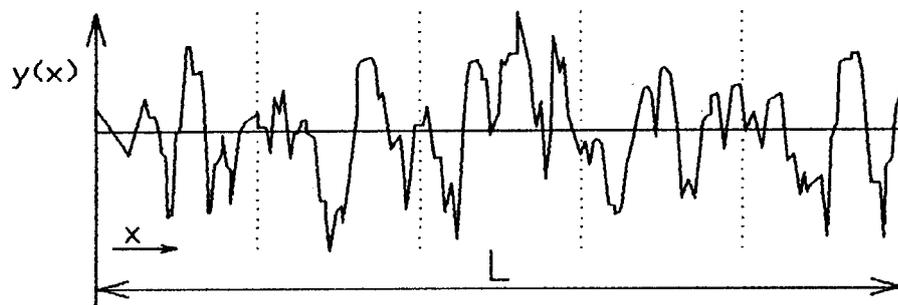
Ocelový blok ve tvaru válce použitý při kalibraci měl průměr  $195\text{mm}$  a výšku  $140\text{mm}$ . Obě podstavy ocelového válce byly vyhlazeny do zrcadlového lesku. Drsnost povrchu obou podstav byla změřena přístrojem firmy TAYLOR HOBSON na strojní fakultě ČVUT. Výsledky měření jsou zaznamenány v tab.2.2.

Horní podstava					
		S	$\bar{X}$	$X_{\text{max}}$	$X_{\text{min}}$
$R_a$	$[\mu\text{m}]$	0.004	0.086	0.090	0.083
$R_{tm}$	$[\mu\text{m}]$	0.00	0.51	0.51	0.50
$R_v$	$[\mu\text{m}]$	0.06	0.45	0.51	0.38
$R_p$	$[\mu\text{m}]$	0.06	0.38	0.43	0.32
$S_m$	$[\mu\text{m}]$	1.8	25.0	26.2	23.0
$R_{sk}$		0.3	-0.3	0.0	-0.6
$R_{ku}$		0.4	4.1	4.5	3.7
S	$[\mu\text{m}]$	0.4	10.3	10.8	10.1

Dolní podstava					
		S	$\bar{X}$	$X_{max}$	$X_{min}$
$R_a$	[ $\mu\text{m}$ ]	0.027	0.111	0.141	0.087
$R_{tm}$	[ $\mu\text{m}$ ]	0.16	0.69	0.88	0.58
$R_v$	[ $\mu\text{m}$ ]	0.11	0.45	0.57	0.35
$R_p$	[ $\mu\text{m}$ ]	0.07	0.44	0.49	0.36
$S_m$	[ $\mu\text{m}$ ]	2.6	25.6	27.9	22.7
$R_{sk}$		0.1	-0.3	0.0	-0.4
$R_{ku}$		0.2	3.2	3.5	3.1
S	[ $\mu\text{m}$ ]	1.2	9.8	11.2	8.8

Tab.2.2 Parametry drsnosti obou podstav  
zkušebního ocelového válce

kde S je výběrová směrodatná odchylka a  $R_a$ ,  $R_{tm}$ ,  $R_v$ ,  $R_p$ ,  $S_m$ ,  $R_{sk}$ ,  $R_{ku}$  a S jsou parametry drsnosti povrchu, které jsou definovány následovně:



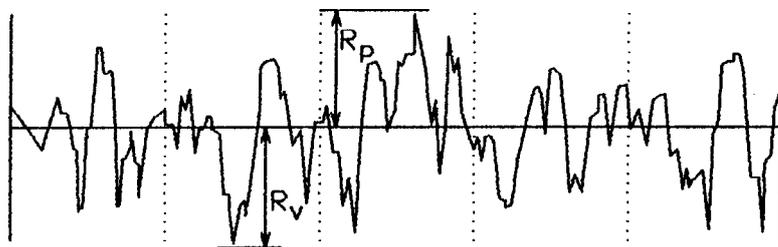
$R_a$  je střední aritmetická úchylka profilu definovaná vtahem

$$R_a = \frac{1}{L} \int_0^L |y(x)| dx$$

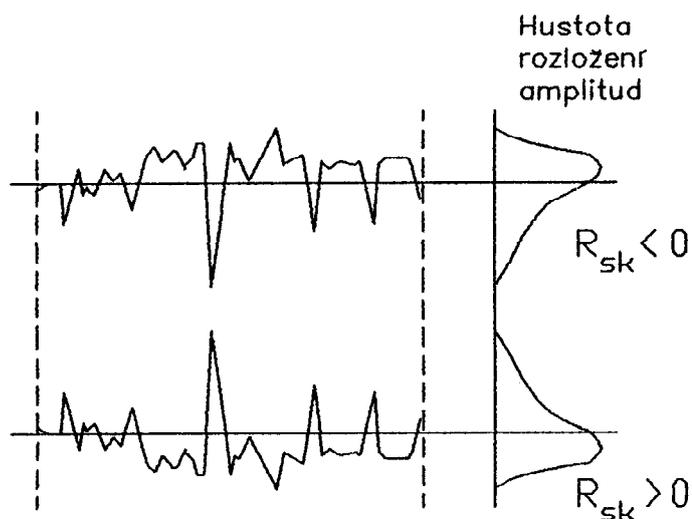


$R_q$  je efektivní hodnota parametru  $R_a$

$$R_q = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L y^2(x) dx}$$



$R_v$  je maximální hloubka profilu pod střední úrovní profilu a  $R_p$  je maximální výška profilu nad střední úrovní profilu.

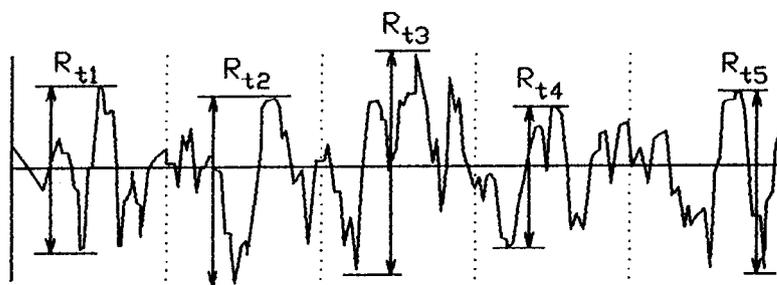


$R_{sk}$  je parametr udávající symetrii hustoty rozložení amplitud profilu. Je-li  $n$  počet amplitud profilu, pak platí

$$R_{sk} = \frac{1}{n R_q^3} \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^3$$

$R_{ku}$  je parametr udávající strmost profilu. Je-li  $n$  počet amplitud profilu, pak platí

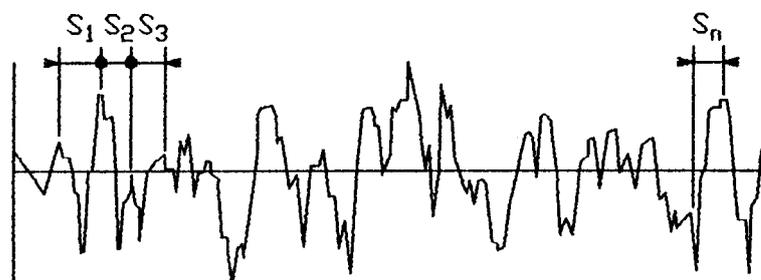
$$R_{ku} = \frac{1}{n R_q^4} \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^4 .$$



$R_{ti}$  je maximální hodnota špička-špička profilu v daném měřeném úseku,

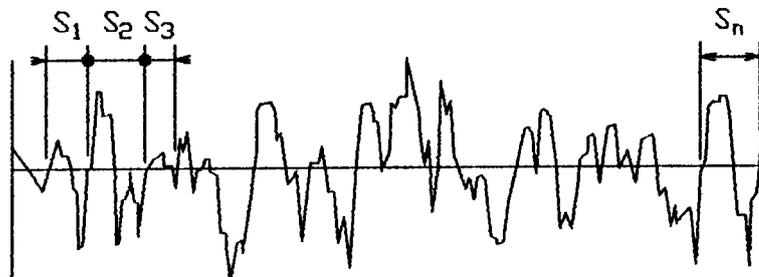
$R_{tm}$  je průměr všech hodnot  $R_{ti}$ . Obvykle je těchto hodnot pět

$$R_{tm} = (R_{t1} + R_{t2} + R_{t3} + R_{t4} + R_{t5}) / 5 .$$



$S$  je průměr vzdáleností lokálních špiček. (Lokální špička je nejvyšší část profilu mezi dvěma sousedními minimy a uvažuje se pouze v případě, pokud vzdálenost mezi špičkou a minimem je alespoň 1% hodnoty špička-špička profilu.) Je-li  $n$  počet uvažovaných špiček, pak

$$S = (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n) / n .$$



$S_m$  je průměr vzdáleností průchodů náběžných hran profilu střední úrovní profilu.

Je-li  $n$  počet uvažovaných průchodů, pak

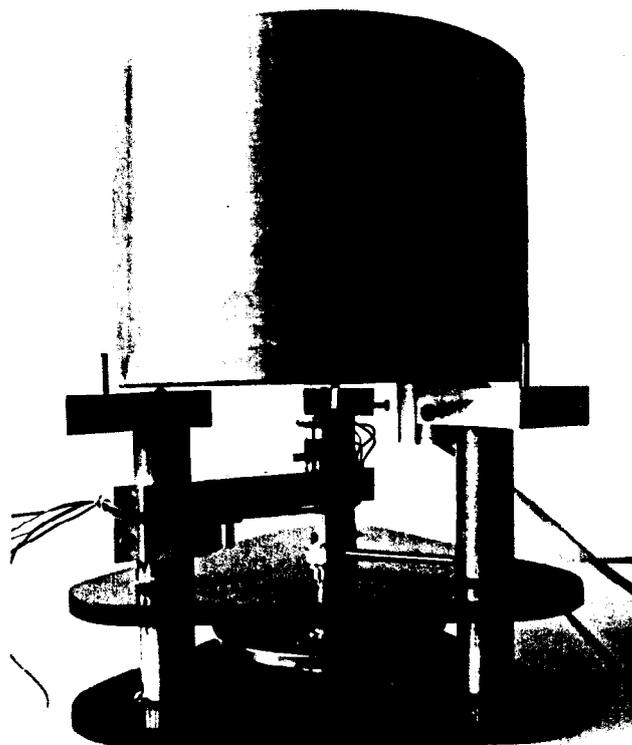
$$S_m = (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n) / n .$$

Válec spočíval na třech ocelových kuličkách, které byly zapuštěny v ocelových válečcích podpěrného zařízení.

Podpěrné zařízení slouží kromě podpory kalibračního bloku ještě k instalaci zařízení pro lámání kapilár (viz fot. 2.1).

Signál z kónického snímače bylo vedeno do digitálního osciloskopu (KIKUSUI 7201A). Spouštěcí signál byl odebírán z klasického rezonančního snímače akustické emise, který byl umístěn v blízkosti budícího zdroje. Oba signály - signál z kónického snímače i signál spouštěcí - byly navzorkovány kmitočtem 20MHz a uloženy do paměti osciloskopu. Po uložení několika záznamů do paměti osciloskopu byly tyto záznamy přeneseny po sběrnici IMS-2 do počítače PC AT pro další zpracování.

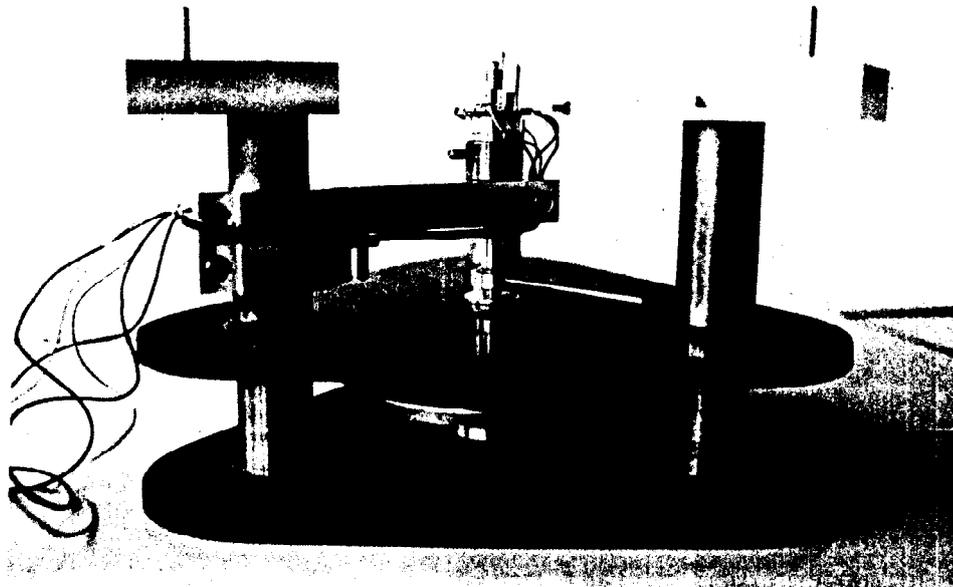
Celá kalibrační aparatura je zachycena na fot. 2.2



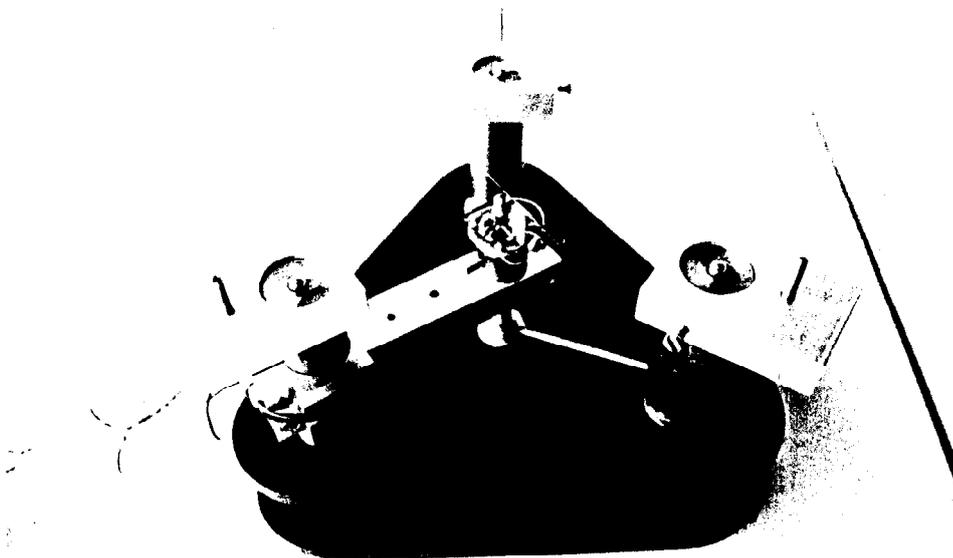
Fot.2.1a Podpěrné zařízení s ocelovým zkušebním blokem



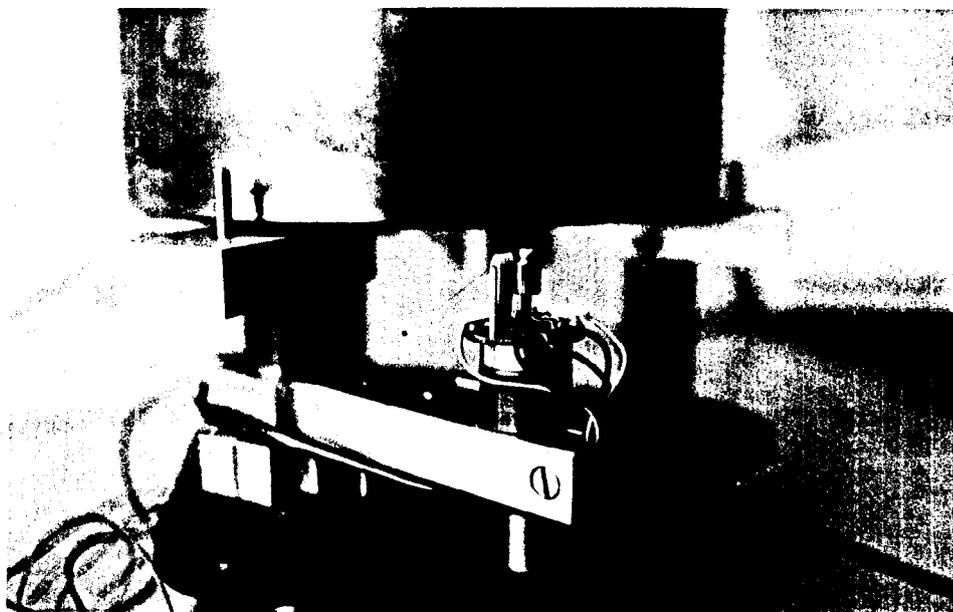
Fot.2.1b Podpěrné zařízení s ocelovým zkušebním blokem  
(detail lámacího zařízení)



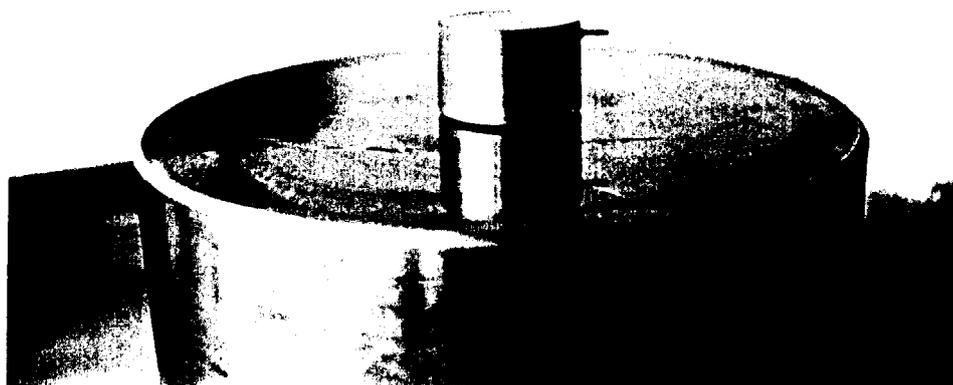
Fot.2.1c Podpěrné zařízení - pohled zředu



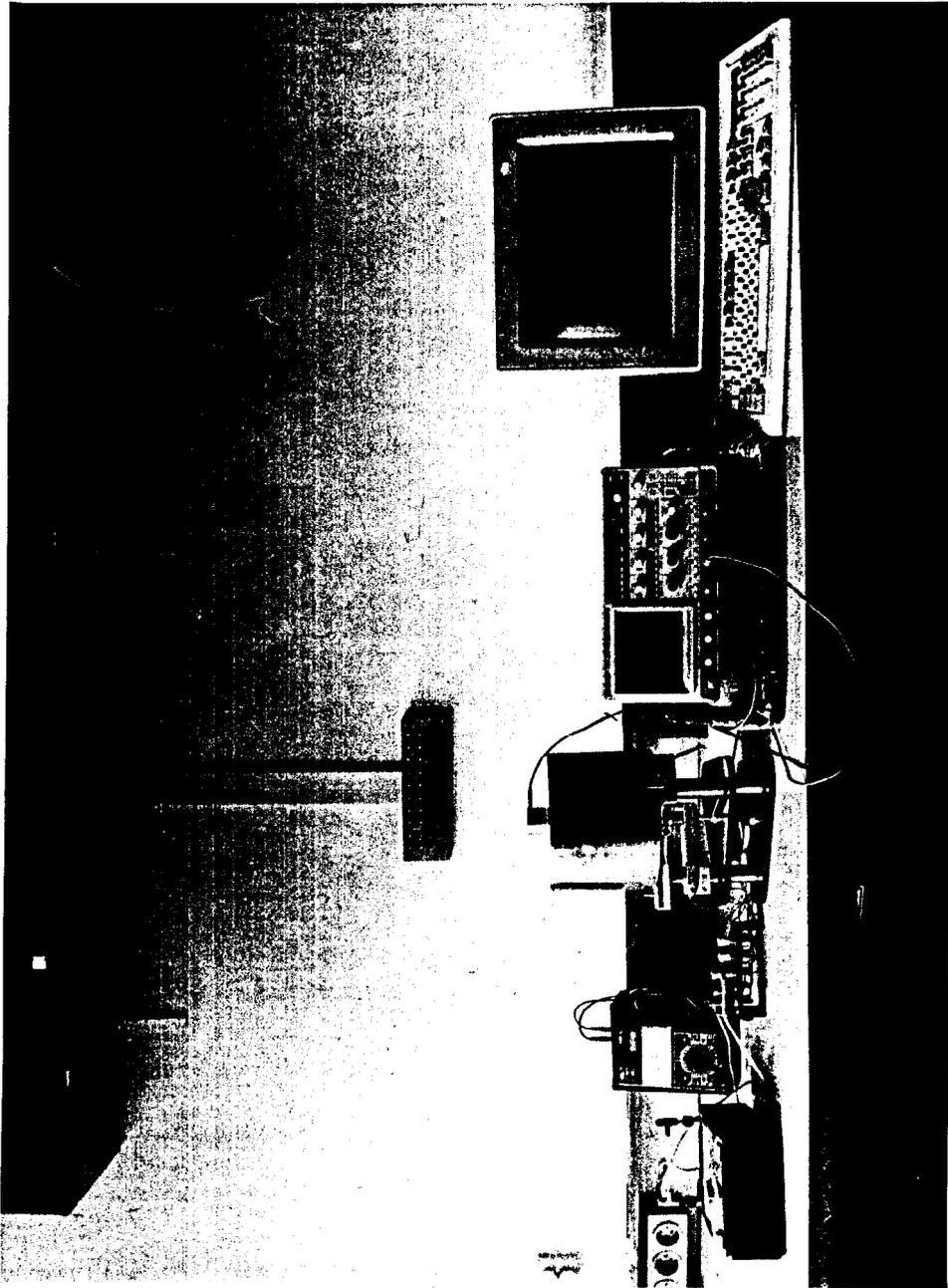
Fot.2.1d Podpěrné zařízení - pohled shora



Fot.2.1e Lámací zařízení na výkyvném rameni  
podpěrného zařízení



Fot.2.1f Cylindrický snímač na ocelovém zkušebním bloku



Fot.2.2 Kalibrační aparatura

## 2.5 Přehled výsledků

Signál z kónického snímače, sestávající z 1024 hodnot (záznam dlouhý  $51.2\mu\text{s}$  se vzorkovacím krokem  $0.05\mu\text{s}$ ), byl po přenesení z osciloskopu do počítače PC AT podroben dalšímu zpracování, které vypadalo následovně:

- a) vybrat ze záznamu úsek dlouhý  $25.6\mu\text{s}$  (512 vzorků), který není ovlivněn žádnými odrazy od stěn bloku,
- b) z tohoto vybraného úseku vzít pouze každý druhý vzorek, neboť vzorkovací krok je zbytečně malý (vysoké kmitočty jsou značně ovlivněny šumem a nás zajímá kmitočtová charakteristika pouze do 1 MHz); máme tedy záznam dlouhý  $25.6\mu\text{s}$  se vzorkovacím krokem  $0.1\mu\text{s}$  (256 vzorků),
- c) podle kap.1 vypočítat teoretický průběh výchylky se stejnými časovými parametry,
- d) provést FFT signálů získaných podle bodu b) a c),
- e) vydělit tato spektra.

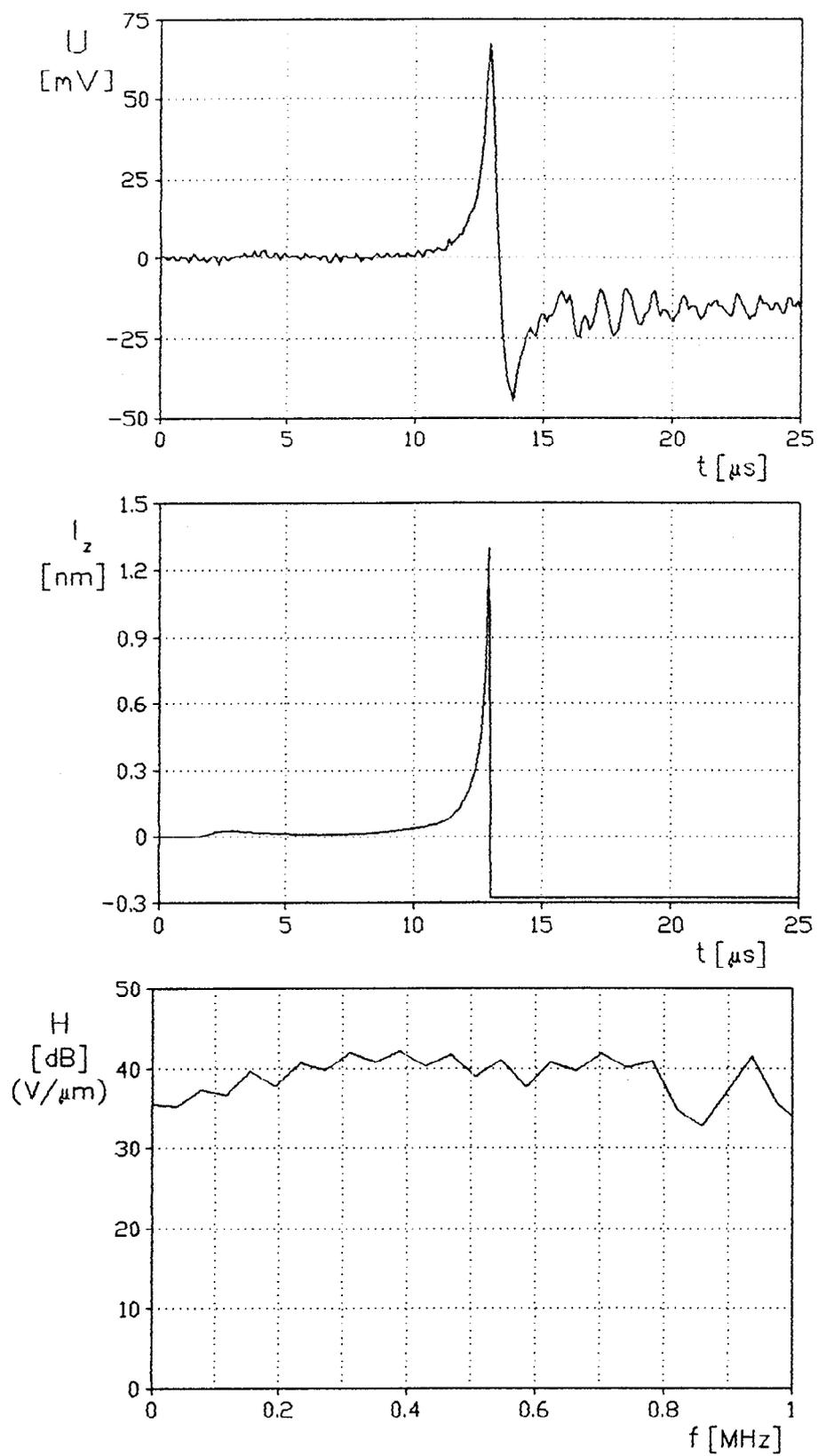
Na obr.2.16,2.17 a 2.18 jsou zobrazeny výsledky kalibrace - frekvenční charakteristiky kónického a cylindrického snímače při kalibraci povrchovým a podpovrchovým buzením. Na každém obrázku je nahoře průběh naměřeného signálu, uprostřed je teoretický průběh výchylky a dole je frekvenční charakteristika použitého snímače vyjadřená v dB vztažených k  $V/\mu\text{m}$ .

Obr.2.16 byl získán při kalibraci kónického snímače s povrchovým buzením.

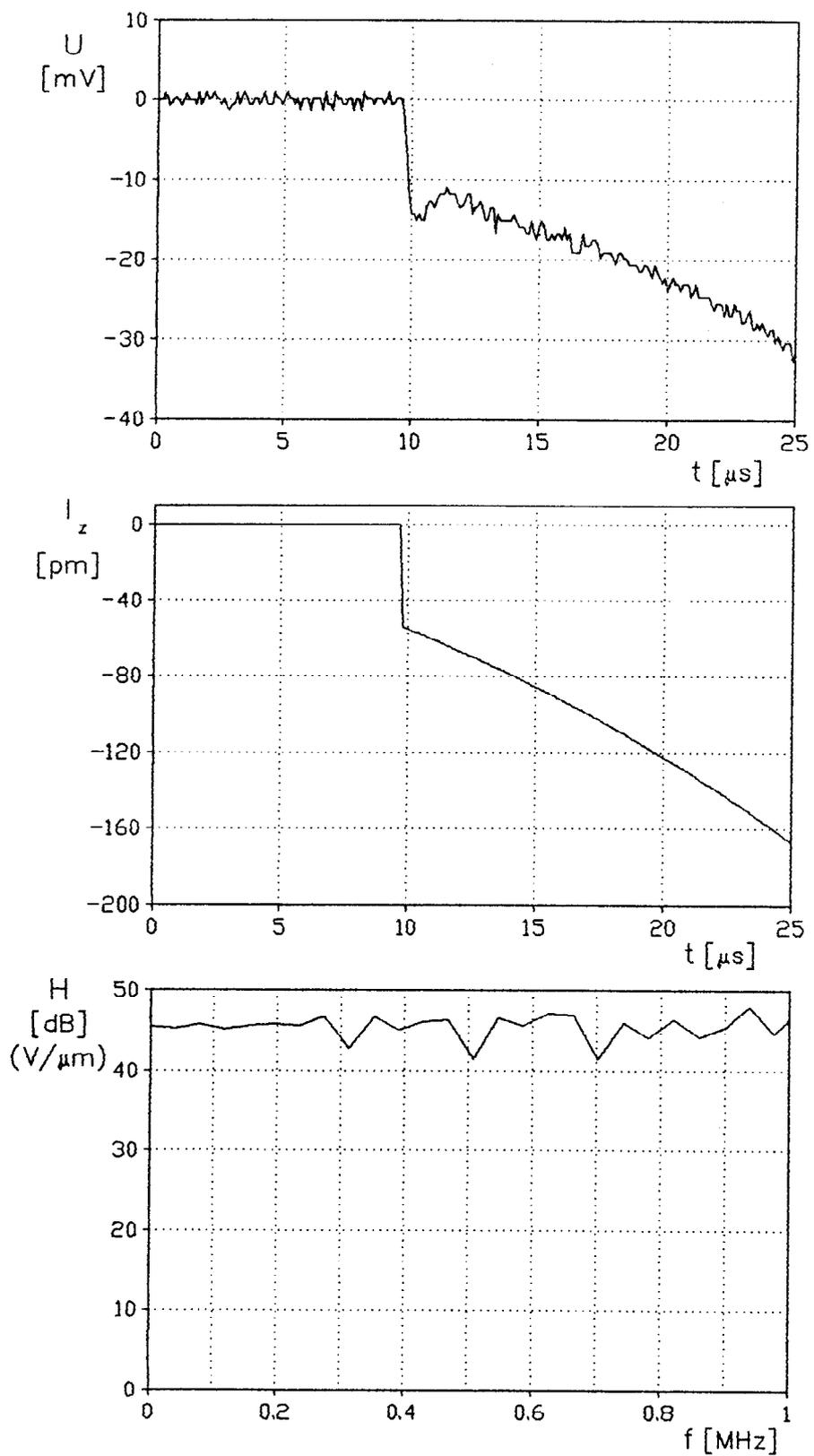
Obr.2.17 byl získán při kalibraci kónického snímače s podpovrchovým buzením.

Obr.2.18 byl získán při kalibraci cylindrického snímače s podpovrchovým buzením.

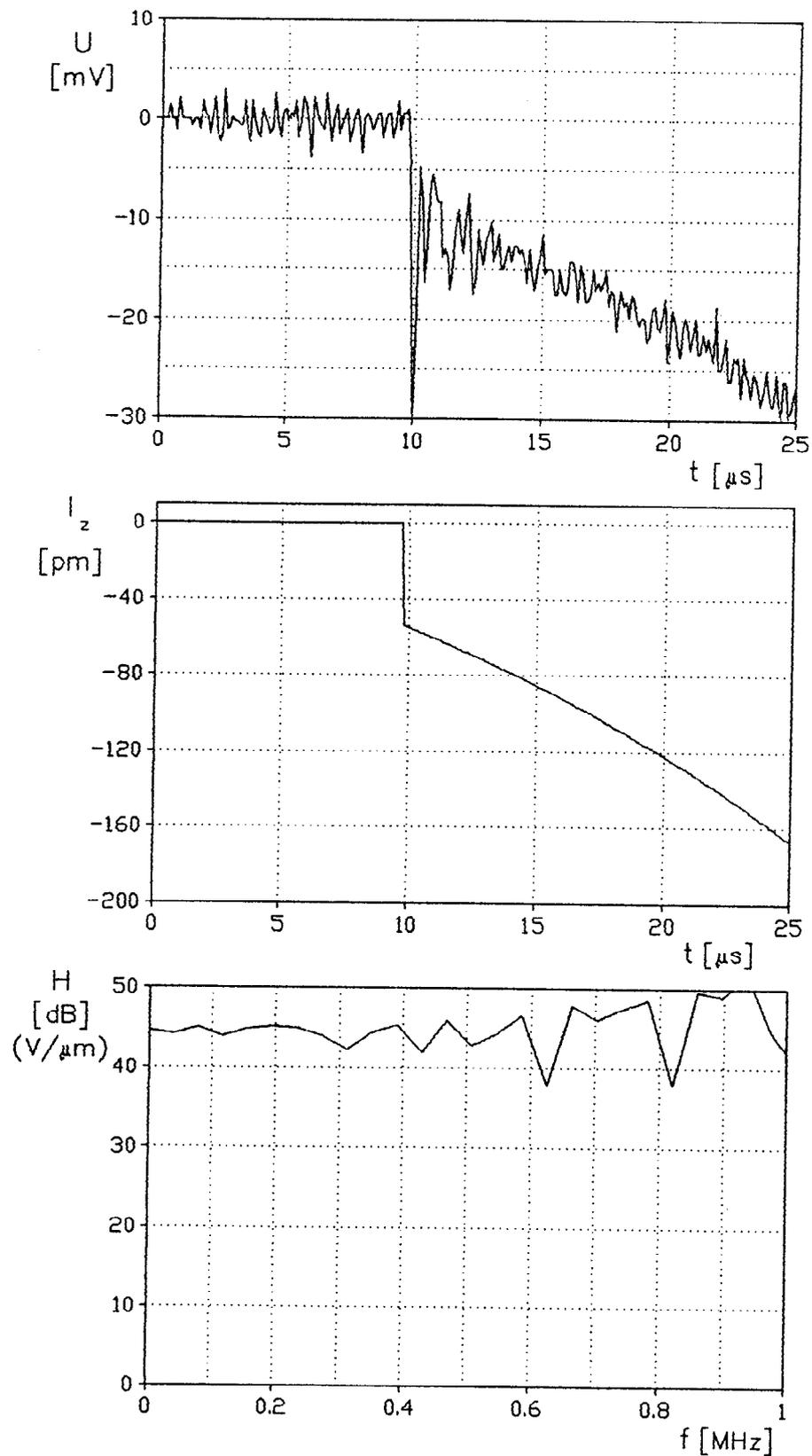




Obr.2.16 Charakteristiky kónického snímače při povrchové kalibraci



Obr.2.17 Charakteristiky kónického snímače při podpovrchové kalibraci



Obr.2.18 Charakteristiky cylindrického snímače při podpovrchové kalibraci

#### IV. Výsledky práce; nové poznatky

V teoretické části práce byly na základě známých řešení [6] provedeny numerické výpočty časových průběhů vertikální složky výchylky na povrchu poloprostoru při povrchovém i podpovrchovém buzení skokovou funkcí síly. Dále se v teoretické části práce podařilo nalézt explicitní funkce, které s dostatečnou přesností aproximují časové průběhy vertikální složky výchylky na povrchu poloprostoru při podpovrchovém buzení. Maximální odchylka aproximující funkce a přesného průběhu činí pro  $r/h=0$  pouze 0,86%. Uvedená přesnost je pro praktické výpočty plně postačující. Aproximací byla odstraněna nutnost řešit složité komplexní integrály a tím se podstatně zkrátila doba výpočtu časových průběhů vertikální složky výchylky na povrchu poloprostoru při podpovrchovém buzení skokovou funkcí síly bez snížení přesnosti.

V praktické části práce se podařilo zhotovit standardní snímač akustické emise (cylindrický snímač); zařízení na měření síly při zlomu křemenné kapiláry, kterého je zapotřebí při absolutní kalibraci snímačů; podpěrné zařízení, které podpírá kalibrační ocelový blok a složí dále k instalaci zařízení pro lámání kapilár a měření síly při zlomu. Dále se v praktické části práce podařilo na tomto kalibračním zařízení absolutně zkalibrovat zapůjčený kónický snímač i zhotovený snímač cylindrický. Oba snímače vykazovaly v kmitočtovém pásmu 0 až 1 MHz vyrovnanou frekvenční charakteristiku s průměrnou citlivostí 40 dB [ $V/\mu m$ ].

## V. Závěry pro praxi a další rozvoj vědní disciplíny

V práci popsaná metoda kalibrace umožňuje absolutně kalibrovat snímače akustické emise a tím dává možnost kvantitativně porovnávat jak snímače různých firem, které se k nám dovážejí, tak i snímače z našich pracovišť. Zvláště výrazně se nutnost kalibrace projevuje při lokalizaci zdrojů akustické emise, kde je nezbytné znát citlivost jednotlivých snímačů.

V nejbližší budoucnosti bude velmi užitečné použít při kalibraci rozměrnější zkušební ocelový blok, aby bylo možno zaznamenat větší časový úsek signálu, který by nebyl rušen odrazy od stěn ocelového bloku. Tímto by se zvětšila frekvenční rozlišovací schopnost kalibrace. Další možností, které by vedla ke zkvalitnění kalibrační metody, by bylo použít místo zkušebního ocelového válce ocelový pás popřípadě ocelovou polokouli. S těmito změnami by bylo zapotřebí provést i odpovídající výpočty vychylek pro nekonečný pás. Pro realizaci uvedených záměrů však bude nutné použití výkonnější techniky, která umožní rychlejší a přesnější navzorkování signálů ze snímačů.

### Seznam použité literatury

- [ 1] Angot, A.:  
Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry;  
SNTL, Praha, 1971
  
- [ 2] Breckenridge, F. R.; Greenspan, M.:  
Surface-wave displacement: Absolute Measurements  
using a capacitative transducer;  
J.Acoust.Soc.Am., Vol.69, 1981, str.1177-1185
  
- [ 3] Breckenridge, F. R.; Tschiegg, C. E.; Greenspan, M.:  
Acoustic emission:  
Some applications of Lamb's problem;  
J.Acoust.Soc.Am., Vol.57, 1975, str.626-631
  
- [ 4] Brepta, R.:  
Rázy a vlny napětí v pevných elastických tělesech;  
Vydavatelství ČVUT, Praha, 1977
  
- [ 5] Buchar, J.; Dušek, F.; Schreppel, U.; Seidl, C.:  
Kalibrace snímačů akustické emise;  
Kovové materiály 2,18, Bratislava, 1980
  
- [ 6] Cagniard, L.:  
Reflexion et réfraction des ondes  
séismiques progressives;  
Gauthiér-Villars, Paříž, 1939  
[Reflection and refraction of progressive  
seismic waves;  
anglický překlad Flynn, E.A. a Dix, C.H.  
McGraw-Hill, New York, 1962 ]

- [ 7] Greenspan, M. :  
The NBS conical transducer: Analysis;  
J.Acoust.Soc.Am., Vol.81, 1987, str.173-183
- [ 8] Klaboch, L. :  
Experimentální analýza napjatosti;  
Vydavatelství ČVUT, Praha, 1972
- [ 9] Hégr, J. :  
Elektroakustická impulzní analýza  
soustav v pevné fázi;  
Kandidátská disertační práce  
ČVUT FEL, Praha, 1986
- [10] Hora, P. :  
Model zdroje akustické emise a vliv vazební vrstvy  
na snímaný signál akustické emise;  
Písemná práce k odborné kandidátské zkoušce  
ČVUT FEL, Praha, 1989
- [11] Merhaut, J. :  
Teoretické základy elektroakustiky;  
Academia, Praha, 1976
- [12] Mohamed, A. :  
Equivalent circuits of solid horns  
undergoing longitudinal vibration;  
J.Acoust.Soc.Am., Vol.38, 1965, str.862-866
- [13] Mooney, H. M. :  
Some numerical solutions for Lamb's problem  
B.Seism.Soc.Am., Vol.64, 1974, str.473-491

- [14] Pao, Y. H.; Gajewski, R. R.:  
The generalized ray theory and transient responses  
of layered elastic solids;  
Physical Acoustics, Vol.13, Chap.6  
Academic Press, NewYork, 1977
- [15] Pao, Y. H.; Gajewski, R. R.; Ceranoglu, A. N.:  
Acoustic emission and transient waves  
in a elastic plate;  
J.Acoust.Soc.Am., Vol.65, 1979, str.96-105
- [16] Pekeris, C. L.:  
The seismic surface pulse;  
Proc.Natl.Acad.Sci., Vol.41, 1955, str.469
- [17] Pekeris, C. L.:  
The seismic buried pulse;  
Proc.Natl.Acad.Sci., Vol.41, 1955, str.629
- [18] Pekeris, C. L.; Lifson, H.:  
Motion of the surface of a uniform elastic  
half-space produced by a buried pulse;  
J.Acoust.Soc.Am., Vol.29, 1957, str.1233-1238
- [19] Proctor, T. M. Jr.:  
An improved piezoelectric acoustic emission  
transducer;  
J.Acoust.Soc.Am., Vol.71, 1982, str.1163-1168
- [20] Rektorys, K. a kol.:  
Přehled užité matematiky;  
SNTL, Praha, 1973



- [21] Salava, T.:  
Elektroakustická měření;  
SNTL, Praha, 1979
- [22] Škvor, Z.:  
Obvodové modely kmitajících soustav  
v pevné a plynné fázi;  
Studie ČSAV 16/86, Academia, Praha, 1986
- [23] Valouch, M.; Brož, J.; Roskovec, J.:  
Fyzikální a matematické tabulky;  
SNTL, Praha, 1980