

FATIGUE STRENGTH AND LIFE OF REAL STRUCTURES UNDER COMBINED RANDOM LOADING

J. Svoboda, M. Balda, V. Fröhlich *

Summary: *An investigation of fatigue strength and life is usually joined with experiments, which are made using small testing specimens. This is the reason why majority of numerical methods used for fatigue of materials was derived basing on those experiments under simple kinds of loading. It is rather difficult to apply these methods for real structures loaded by random combined processes in service. Most of necessary data and formula are empirical and used to be taken from a literature. This often leads to unexpectable results. The contribution discusses the problem and shows its complexity on an example in which the experimental an numerical results of fatigue lives of front parts of the Metro-coach bogie are compared.*

1. Úvod

Studium únavové pevnosti a životnosti je obvykle vázáno na experimenty prováděné na malých zkušebních vzorcích. Důvodem k tomu je především možnost zkoušet větší počet vzorků a při zpracování výsledků aplikovat metody statistiky, což je v případě reálných konstrukcí z ekonomických důvodů nemožné. Toto omezení vede k tomu, že pro pevnostní hodnocení určitého konstrukčního uzlu máme sice k dispozici řadu výpočtových metod, které však nelze aplikovat, protože nemáme dostatek podkladů jak o skutečném zatížení konstrukce, tak o použitém materiálu a jeho únavových vlastnostech. V praxi to vede k tomu, že zavádíme řadu zjednodušujících předpokladů, které mohou vést k chybným závěrům a často i k únavovému porušení konstrukce v provozu, zejména v případech jedná-li se o svařence, u nichž do výpočtu nedokážeme zahrnout informaci o konkrétní technologii jejich provedení.

V příspěvku jsme si jako reálný konstrukční uzel vybrali spojení trubkového čelníku s podélníkem u podvozkových rámu vozů pro Metro a pokusili se u něho ověřit jak aplikovat dva nejčastěji používané způsoby výpočtu pro dimezování dynamicky namáhaných reálných konstrukcí v případě jejich kombinovaného náhodného zatěžování a zjistit, s jakou přesností lze v těchto případech počítat. Jednalo se o výpočet bezpečnosti vůči trvalé pevnosti a o výpočet životnosti.

* Ing. Jaroslav Svoboda, Prof. Ing. Miroslav Balda, DrSc.Feng., Bc. Vladislav Fröhlich, Ústav termomechaniky AVČR, Centrum diagnostiky materiálů, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň, svoboda @cdm.it.cas.cz, balda @cdm.it.cas.cz, fröhlich @cdm.it.cas.cz

2. Experimentální program

Zkoušeny byly dva zkušební vzorky lišící se délkou ramena přes které se přenášelo zatížení na trubku, což umožnilo provádět zkoušky při dvou různých hodnotách $\kappa = \tau_k / \sigma_o$ (stejný ohyb a dva různé M_k). Konstrukční uzly byly vyrobeny ve společnosti ŠKODA Dopravní technika s.r.o. Jejich provedení v oblasti kritické části je zřejmé z obr.1.



Obr.1 Pohled na zkušební vzorek s nalepenými tenzometrickými snímači

Čelník tvoří tlustostěnná trubka o vnějším průměru 108 mm a tloušťce stěny 13 mm z materiálu 11503.1, která je svými konci přivařena do podélníků rámu a vyztužena dvěma žebry, přivařenými poměrně složitým svarem, zakončeným čelním koutovým svarem, který byl předmětem našeho zájmu. S ohledem na symetrii bylo zkoušeno pouze zakotvení trubky do jednoho z obou podélníků – viz. obr.2.

Na zkušební vzorky byly nalepeny 2 tenzometrické růžice. Jedna do přechodového rádiu svaru a jedna do tzv. „nominálního místa“ ve vzdálenosti 35mm – viz obr.1. Na prvý z uvedených vzorků byla nalepena navíc jedna tenzometrická růžice na vnější stranu žebra.

Způsob upevnění konstrukčních uzlů při zkouškách je zřejmý z obr. 2. Podélník byl prostřednictvím tlusté desky připevněn k boku upínací kostky spojené se základovou deskou laboratoře a zajištěn proti natočení. Pro zatěžování trubky souřadným náhodným kombinovaným zatížením byl použit servoválec 63 kN od fy. IST Darmstadt. Válec byl řízen elektronikou LABTRONIC 8800 spojenou s řídicím počítačem. Zatěžovací síla působila na rameni, přes které se přenášel současně i krouticí moment na trubku.

Oba zkušební vzorky byly zatěžovány širokopásmovým náhodným procesem s frekvencemi $0 \div 10$ Hz, gaussovského typu, s konstantním tvarem výkonové spektrální hustoty. Zatěžovací blok sestával z $1,2 \cdot 10^6$ vzorků, trvání jednoho bloku bylo 20 minut.

Poněvadž PID regulátor s ohledem na větší amplitudy nedotahoval přesně špičky zadaného průběhu síly, snímali jsme během zkoušky její skutečný průběh, který byl zpracován

programem MATLAB. Současně s průběhem síly byly měřicím zařízením SPIDER 8 měřeny a ukládány hodnoty deformací ε_0 , ε_{45° a ε_{90° z tenzometrických růžic. Pro jejich zpracování byl vytvořen speciální program, který umožnil vyhodnotit hlavní napětí a úhel jejich rovin v průběhu celého zatěžovacího bloku.



Obr.2 Celkový pohled na zatěžovaný konstrukční uzel

V následujících kapitolách se zaměříme na provedení pevnostního výpočtu konstrukčních uzlů a na výpočet jejich životností.

3. Výpočet bezpečnosti konstrukčních uzlů vůči meznímu napětí

Výpočet se obvykle užívá, když počet špičkových hodnot v náhodném procesu zatížení ocelových konstrukcí převyšuje v průběhu jejich života 10^7 . V tomto případě již není nutné počítat životnost, nýbrž bezpečnost vůči trvalé pevnosti. Příkladem mohou být konstrukce podvozkových rámu kolejových vozidel, konstrukce energetických zařízení apod.

Při aplikaci výpočtu jsme vyšli z rovnice eliptického oblouku mezních napětí [1], který jsme s ohledem na kombinované náhodné zatěžování zvolili ve tvaru

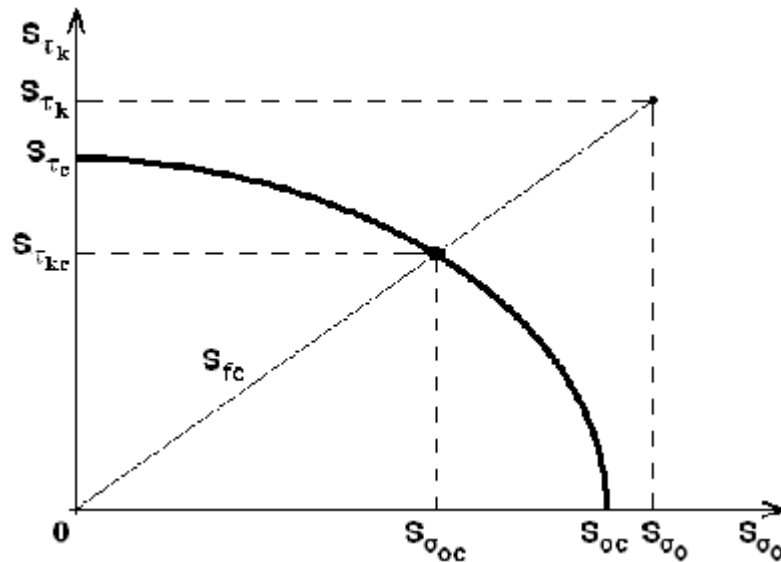
$$\left(\frac{s_{\sigma_{oc}}}{s_{oc}} \right)^2 + \left(\frac{s_{\tau_{kc}}}{s_{\tau_c}} \right)^2 = 1, \quad (1)$$

kde s_{oc} ... mezní hodnota směrodatné odchylky procesu ohybového napětí

s_{τ_c} ... mezní hodnota směrodatné odchylky procesu krutového napětí

$s_{\sigma_{oc}}$, $s_{\tau_{kc}}$... složky kritické směrodatné odchylky efektivního napětí s_{fc} odpovídající bodu na mezním eliptickém oblouku pro daný poměr $\kappa = s_{\tau_k} / s_{\sigma_o}$.

Obě náhodná napětí $\sigma_o(t)$ a $\tau_k(t)$ působí ve fázi, takže lze předpokládat exponent c regresní čáry roven 2 – viz [1]. Proto jsme rovněž v případě jejich směrodatných odchylek zvolili $c=2$. Na obr.3 je znázorněn příslušný eliptický oblouk.



Obr.3 Eliptický oblouk mezních směrodatných odchylek

Z obrázku vyplývá, že hlavním problémem je stanovit mezní hodnoty směrodatných odchylek s_{oc}, s_{τ_c} pro vybraný konstrukční uzel (obvykle s vysokou úrovní napětí, nebo složitým technologickým provedením), jehož únavovou bezpečnost musíme zaručit. Další postup výpočtu je již jednoduchý:

- Z rovnice (1) odvodíme vztah (2) pro výpočet mezních směrodatných odchylek obou náhodných namáhání uzlu a poměr $\kappa = s_{\tau_k} / s_{\sigma_o}$. Tyto hodnoty získáme ze vztahu

$$s_{\sigma_{oc}} = \sqrt{\frac{s_{oc}^2}{1 + \kappa^2 k_c^{*2}}}, \quad (2)$$

kde $k_c^* = \frac{\sigma_{oc}^*}{\tau_{kc}^*}$ je poměr kritických únavových napětí v ohybu a krutu pro daný konstrukční uzel.

Druhou směrodatnou odchylku $s_{\tau_{kc}}$ vypočteme pomocí κ a vztahu (2).

- Kritickou směrodatnou odchylku efektivního napětí s_{fc} bodu na eliptickém oblouku vypočítáme ze vztahu

$$s_{fc} = \sqrt{s_{\sigma_{oc}}^2 + s_{\tau_{kc}}^2}. \quad (3)$$

- Součinitel bezpečnosti n pro sledovaný konstrukční uzel

$$n = \frac{S_{fc}}{\sqrt{s_{\sigma_o}^2 + s_{\tau_k}^2}}. \quad (4)$$

Budou-li směrodatné odchylky zatěžovacích procesů ležet nad mezní křivkou, bude součinitel bezpečnosti $n < 1$, pro body ležící na průvodiči pod mezní křivkou bude $n > 1$.

Vraťme se ještě k problému stanovení mezních směrodatných odchylek s_{σ_o}, s_{τ_k} , které jsou koncovými body eliptického oblouku na obr. 3. Problém jejich stanovení pro konkrétní místo na konstrukci je v tom, že nemáme obvykle dostatek objektivních informací o jeho únavových vlastnostech. Obvykle známe pouze mez pevnosti R_m a mez kluzu R_e základního materiálu a informaci o způsobu namáhání daného konstrukčního uzlu.

Uveďme proto postup, který jsme aplikovali v daném případě:

- Výpočet mezí únavy σ_{oc} a τ_{kc} na základě empirických vztahů z literatury [2] a [3]

$$\text{pro ohyb} \dots\dots\dots \sigma_{oc} \cong 0,50 R_m$$

$$\text{pro krut} \dots\dots\dots \tau_{kc} \cong 0,25 \div 0,28 R_m.$$

- Přepočtení těchto hodnot pro místo koutového svaru na základě zvolených součinitelů β_σ a β_τ získaných z literatury [3]. Serensen uvádí hodnotu $\beta_\sigma = 2,6$. (Hodnotu $\beta_\tau = 1,83$ jsme získali přepočtem z hodnot α_σ a α_τ).

$$\sigma_{oc}^* = \frac{\sigma_{oc}}{\beta_{\sigma_o}}; \quad \tau_{kc}^* = \frac{\tau_{kc}}{\beta_\tau} \text{ a rovněž konstantu } k_c^* = \frac{\sigma_{oc}^*}{\tau_{kc}^*}.$$

- Z průběhu zatěžovací síly F a její směrodatné odchylky s_F a na základě znalosti příslušných délek ramen a tuhostí trubky byly vypočítány maximální hodnoty nominálního napětí $\sigma_{o\max}$ a $\tau_{k\max}$ pro kontrolované místo, ale rovněž směrodatné odchylky s_{σ_o} a s_{τ_k} průběhu obou napětí.

- Z předpokladu, že mezní směrodatná odchylka s_{oc} průběhu ohybového napětí bude dosažena při $\sigma_{o\max} = \sigma_{oc}^*$, lze ji vypočítat ze vztahu

$$s_{oc} = \frac{\sigma_{oc}^*}{\sigma_{o\max}} s_{\sigma_o}. \quad (5)$$

- Druhou mezní hodnotu s_{τ_c} pro krutové napětí získáme pomocí hodnoty k_c^* ze vztahu

$$s_{\tau_c} = \frac{s_{oc}}{k_c^*}. \quad (6)$$

Tab.1 Údaje pro výpočet bezpečnosti zkoušených vzorků

Hodnoty	Vzorek č.1	Vzorek č.2
F_{max} [kN]	31,981	31,51
s_F [kN]	7,3433	7,323
σ_{omax} [MPa]	175,3	168,7
τ_{kmax} [MPa]	75,4	38,2
s_{σ_o} [MPa]	41,35	39,21
s_{τ_k} [MPa]	17,8	8,88
$\kappa = s_{\tau_k} / s_{\sigma_o}$	0,43	0,226
σ_{oc}^* [MPa]	106	106
τ_{kc}^* [MPa]	87,4	87,4
$k_c^* = \sigma_{oc}^* / \tau_{kc}^*$	1,21	1,21
s_{oc} [MPa]	25	24,6
s_{τ_c} [MPa]	20,7	20,3
$s_{\sigma_{oc}}$ [MPa]	22,2	23,7
$s_{\tau_{kc}}$ [MPa]	9,5	5,4
S_{fc} [MPa]	24,1	24,3
n	0,54	0,6

4. Výpočet životnosti konstrukčních uzlů

Výpočet životnosti u konstrukcí aplikujeme tehdy, máme-li zajistit jejich bezpečný život po předem stanovenou dobu provozu. Příkladem mohou být konstrukce letadel, automobilů apod., u nichž životnost udáváme v počtu letových hodin, nebo v počtu kilometrů. V případech jednoosého namáhání postupujeme při výpočtu životnosti tak, že vyjdeme z průběhu skutečného provozního zatížení konstrukce a stanovíme, v první fázi obvykle výpočtem, tzv. „kritická místa“ u kterých lze očekávat, že budou rozhodovat o její životnosti. Pro tato místa pak vypočteme životnosti, abychom prokázali, že u dané konstrukce jsou požadavky na bezpečný život splněny.

Postup při výpočtu životnosti, lze stručně shrnout do následujících bodů:

- Stanovení tzv. „reprezentačního vzorku namáhání“ který udává informaci o průběhu a velikosti napětí v materiálu konstrukčního uzlu, které může být příčinou jeho dílčího

poškození, odpovídajícímu zvolené délce života, počtu najetých kilometrů a pod.. Tyto informace získáme obvykle na základě provozních měření na prototypu.

- Digitalizace analogových záznamů a jejich zpracování na počítači obvykle metodou rain-flow, která nám poskytne amplitudy a střední hodnoty cyklů.
- Aplikace hypotéz kumulace únavového poškození pro odhad životnosti.

K tomu abychom mohli některou z těchto hypotéz použít, potřebujeme získat parametry únavové křivky pro konstrukční uzel. Tyto podklady však většinou k dispozici nejsou. Obvykle známe pouze hodnotu meze pevnosti R_m a mez kluzu R_e a únavovou křivku pro výpočet životnosti si musíme vytvořit synteticky na základě řady empirických vztahů uváděných v literatuře, případně v některých normách. Přes tyto problémy je uvedený postup výpočtu použitelný pro jednoosé namáhání a pro konstrukční uzly u nichž je životnost vázána převážně na úroveň napětí. Horší je to v případě svarových spojů, nebo konstrukcí, jejichž životnost je ovlivněna technologií výroby (tzv. technologické vruby), jejíž vliv na životnost nelze do prováděného výpočtu bez efektu většího rozptylu zahrnout. Proto se výrobci vozidel hromadné dopravy uchylují k realizaci ekonomicky velmi nákladných a časově náročných experimentů a nebo k předimenzování svých konstrukcí aplikací výpočtu na trvalou pevnost, což je přístup dnes již konzervativní, pokud bezpečnost volíme větší než 1,1.

Ve výše uvedených odstavcích jsme se stručně zmínili o problémech s aplikací výpočtu životnosti u konstrukcí při jednoosém namáhání. U většiny reálných konstrukcí je však provozní zatěžování mnohem složitější. Konstrukční uzly které rozhodují o životnosti konstrukce jsou obvykle namáhány víceosým náhodným zatížením proporcionálního, nejčastěji však neproporcionálního charakteru. Jak v těchto případech postupovat? Lze rovněž v těchto případech aplikovat modifikovaný výše uvedený přístup nebo je tento přístup nepoužitelný? Odpověď na tyto otázky jsme hledali v provedených experimentech.

Výpočet jsme aplikovali pro naše dva konstrukční uzly zatěžované kombinovaným proporcionálním náhodným namáháním ohyb–krut. Vzájemně se lišily pouze délkou ramene na němž působila síla, což umožnilo sledovat jejich porušování při dvou různých krouticích momentech $M_k(t)$, tedy při dvou poměrech $\kappa = s_\tau / s_\sigma$. Velikost ohybového momentu $M_o(t)$ se lišila pouze v důsledku výrobních tolerancí obou konstrukčních uzlů. Ze známého průběhu zatěžovací síly $F(t)$ byly stanoveny průběhy napětí $\sigma_o(t)$ a $\tau_k(t)$ v přechodu koutového svaru do trubky ze vztahů (7) a (8)

$$\sigma_o(t) = \frac{b}{W_o} F(t) = k_s F(t) \quad (7)$$

$$\tau_k(t) = \frac{a}{W_k} F(t) = k_t F(t) \quad (8)$$

Zavedeme-li pojem poškozující napětí, které umožní převést smykové napětí τ_k na normální σ pomocí koeficientu $k_c = \sigma_c / \tau_c$ pro hladké nebo $k_c^* = \sigma_c^* / \tau_c^*$ pro vrubované vzorky, obdržíme pro sledované svařence vztah

$$\sigma_d(t) = \sqrt{\sigma_o^2(t) + k_c^{*2} \tau_k^2(t)} = F(t) \sqrt{k_s^2 + (k_c^* k_t)^2} \quad (9)$$

Po dekompozici poškozujícího napětí $\sigma_d(t)$ aplikací metody rain-flow, lze rovněž v případě kombinovaného souřazového zatížení použít pro výpočet životnosti hypotézy jako u jednoosé napjatosti.

Pro stanovení parametrů syntetické únavové křivky konstrukčního uzlu vyrobeného z materiálu 11503.1 jsme použili následující hodnoty z literatury:

Tab.2 Seznam empirických vztahů použitých pro výpočet životnosti

Stanovená hodnota	Empirický vztah	Literatura	Hodnota pro výpočet
Mez pevnost materiálu R_m	střední hodnota	ČSN	550 MPa
Mez únavy materiálu pro ohyb	$\sigma_{oc} = 0,5R_m$	[2], [3]	275 MPa
Mez únavy materiálu pro krut	$\tau_{kc} = 0,29R_m$	[2], [3]	160 MPa
Koeficient k_c	$k_c = \sigma_{oc} / \tau_{kc}$	[4]	1,72
Mez únavy pro svar. spoj v ohybu	$\sigma_{oc}^* = \sigma_{oc} / \beta_\sigma$	[3]	106 MPa
Mez únavy pro svar. spoj v krutu	$\tau_{kc}^* = \tau_{kc} / \beta_\tau$	[3]	87,4 MPa
Koeficient k_c^*	$k_c^* = \sigma_{oc}^* / \tau_{kc}^*$	[4]	1,21
Exponent synt. únavové křivky	$w_o^* = 12(\sigma_{oc}^* / \sigma_c)^2 + 3$	[5]	6÷7 (zvol.6)
Počet cyklů pro bod zlomu N_{oc}^*	$N_{oc}^* = 10^{\left(6,4 - \frac{2,5}{w_o^*}\right)}$	[5]	$9,6 \cdot 10^5$
Exponent Haighova diagramu k_H	-	[4]	0,25
Koeficient k_{CD} hypotézy CD	-	[4]	0,75

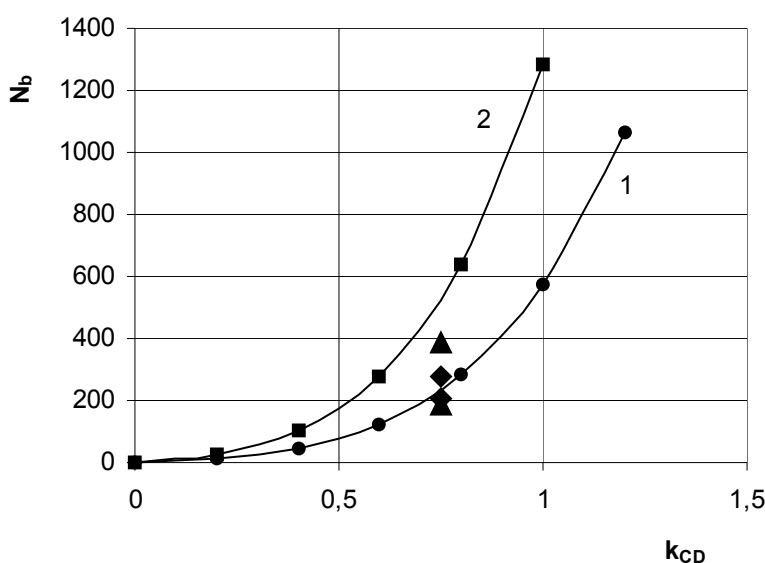
V následující tab. 3 jsou uvedeny výsledné životnosti vypočítané na základě aplikace dvou nejčastěji používaných hypotéz Palmgrenovy-Minerovy a Cortenovy-Dolanovy (CD). Pro výpočet byly dosazeny hodnoty uvedené v tab.2.

Tab.3 Porovnání vypočítaných životností s experimentem

Vzorek č.1 ($\kappa = 0,43$)			Vzorek č.2 ($\kappa = 0,226$)		
Životnost v počtu bloků N_b			Životnost v počtu bloků N_b		
<i>PM</i>	<i>CD</i>	Experiment	<i>PM</i>	<i>CD</i>	Experiment
843	232	204 počátek 275 lom	2726	524	184 počátek lom v jiném místě

Z tabulky vyplývá poměrně dobrá shoda mezi výpočtem životnosti podle hypotézy *CD* a experimentem u vzorku č.1. Vypočítaná životnost pro zvolenou hodnotu $k_{CD} = 0,75$ leží zhruba v polovině životností mezi počátkem trhliny a lomem. Hypotéza *PM* se pro výpočet neosvědčila, protože dává příliš vysoké hodnoty životnosti. U vzorku č. 2, který byl namáhán prakticky stejně velkým ohybem ale polovičním krutem vznikla trhlina rovněž ve svaru konce žebra, téměř při stejném počtu bloků jako u vzorku č.1. Rozšířila se však jen do délky 7,5 mm. Dále se nešířila. Po 388 blocích byla proto zatěžovací síla zvýšena, což mělo za následek rychlý vznik nové trhliny ve svaru spojujícím trubku se stojinou podélníku, kde došlo k lomu. Vypočítanou hodnotu životnosti v tabulce pro koeficient $k_{CD} = 0,75$ nelze již proto s experimentem porovnat.

Na obr.4 jsou vyneseny křivky závislosti počtu zatěžovacích bloků N_b na volbě koeficientu k_{CD} pro oba zkoušené svařence a vyznačeny experimentálně zjištěné životnosti.



Obr.4 Závislost životnosti N_b na volbě koeficientu k_{CD} při aplikaci *CD* hypotézy

5. Zhodnocení výsledků

Provedeme-li stručné shrnutí dosažených výsledků, lze učinit následující závěry platné pro výpočet pevnosti a životnosti u reálných konstrukčních uzlů namáhaných kombinovaným náhodným proporcionálním zatížením:

- Pro výpočet bezpečnosti vůči meznímu napětí lze úspěšně aplikovat postup výpočtu, který je uveden v kap. 3. Vychází z rovnice eliptického oblouku sestrojeného na základě mezních směrodatných odchylek získaných přepočtem směrodatných odchylek jednotlivých složek průběhů zatížení působících na konstrukční uzel. Protože předpokládáme, že při výpočtu bývá k dispozici pouze informace o hodnotě meze pevnosti základního materiálu, je nutné využít empirických vztahů pro výpočet meze únavy a známých postupů z tvarové pevnosti pro výpočet součinitele vrubu β , případně v případě svařových spojů získat příslušnou informaci z literatury. Z rovnice mezního eliptického oblouku stanovíme pro daný poměr $\kappa = s_\tau / s_\sigma$ bod na tomto oblouku, jemuž odpovídá délka průvodiče s_{fc} bezpečnost n . V případě sledovaných

konstrukčních uzlů byly získány hodnoty bezpečnosti $n < 1$, což se potvrdilo vznikem únavových trhlin.

- Větší opatrnost je nutné věnovat výpočtu životnosti. Jak prokázaly provedené zkoušky, lze rovněž v případě reálných konstrukčních uzlů, jakými jsou např. svařence, použít pro výpočet životnosti hypotézu kumulace únavového porušování. Nevhodná je klasická Palmgrenova a Minerova hypotéza, která dává vysoké životnosti. Lze však úspěšně použít *C-D* hypotézu ve spojení s aplikací funkce tzv. poškozujícího napětí jak bylo uvedeno v odstavci 4. Koeficient k_{CD} lze doporučit volit v rozmezí $0,7 \div 0,8$ podle toho, chceme-li životnost vztáhnout k počátku vzniku trhliny, nebo k lomu. Neměl by být ani problém s použitím empirických vztahů pro výpočet parametrů syntetické únavové křivky, u níž lze při výpočtu vystačit se znalostí hodnoty meze pevnosti pro daný materiál. Hlavním problémem je však přesná znalost průběhu dílčích složek namáhání, které na konstrukční uzel působí. Každá z těchto dílčích složek se uplatňuje různou intenzitou na výsledné životnosti. Dále je třeba znát pole napětí v oblasti daného konstrukčního uzlu nejen za účelem stanovení napětí v jeho kritickém místě, ale rovněž s ohledem na jeho gradient a možné přerozdělení napětí po vzniku trhliny. Zejména u svařenců lze očekávat možnost vzniku většího množství krátkých trhlin, jejichž šíření se zastaví, pokud se nenacházejí v místech s trvalým nárůstem napětí. Pouze pro tyto případy lze dosáhnout dobrých výsledků při výpočtu životnosti.

6. Závěr

V příspěvku jsme se zaměřili na problematiku výpočtu bezpečnosti a životnosti u reálných konstrukcí zatěžovaných víceosým náhodným zatížením. K řešení problému jsme přistupovali z pozice výpočtáře, který má pro výpočet k dispozici pouze údaje o statické pevnosti daného materiálu a nemá žádné informace o jeho únavových vlastnostech. Jak ukazuje práce, lze rovněž v těchto případech dosáhnout uspokojujících výsledků. Přesto však doporučujeme ověření životnosti důležitých konstrukčních uzlů experimentem.

Poděkování

Práce byla podpořena Grantovou agenturou ČR grantovým projektem č. 101/02/0043 a výzkumným záměrem Ústavu termomechaniky AV ČR č. AVEZ 2076919.

8. Literatura

- [1] Balda, M., Svoboda, J. (2002) *Problematika mezní únavové napjatosti při kombinovaném namáhání*. Sb. konference Inženýrská mechanika 2002, Svratka, ISBN 80-214-2109-6.
- [2] CISM COURSES AN LECTURES No. 392 (1999) *High-cycle metal fatigue*. Springer Wien New York 1999, ISBN 3-211-83144-4.
- [3] Serensen, S. V., Kogajev, V. P. Šnejderovič, R. M. (1967) *Únosnost a pevnostní výpočty strojních součástí*. SNTL-Nakladatelství technické literatury, Praha 1967.
- [4] Balda, M., Svoboda, J., Fröhlich, V. (2003) *Odhadování únavové životnosti částí při kombinovaném náhodném zatěžování*. Inženýrská mechanika, 10 č.5.1-12, vyd. Heriban, Brno.
- [5] Hück, M. (1981) *Berechnung von Wöhlerlinien für Bauteile aus Stahl, Stahlguss und Grauguss*. Stahl und Eisen, Heft 24/81, s. 57÷60.