IDENTIFIKACE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Miroslav Balda

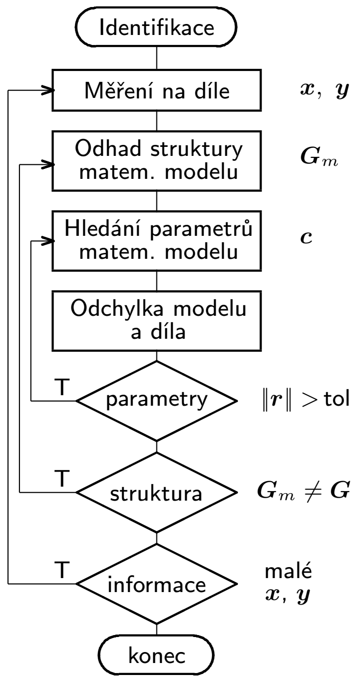
Nové technologie – Výzkumné centrum v západočeském regionu

1 Úvod

Mějme jako objekt pozorování lineární diskrétní dynamický systém, jehož vlastnosti nás zajímají. Pojmem identifikace označujeme proces ztotožňování matematického modelu s dílem. Ten má v zásadě tři fáze – měření, odhadování struktury díla a zjišťování parametrů modelu.

V první etapě se ze vstupů $\boldsymbol{x}(t)$ dimenze n a výstupů $\boldsymbol{y}(t)$ dimenze m odebírají vzorky $\boldsymbol{x}(kT)$ a $\boldsymbol{y}(kT)$ a vytvářejí se maticové časové řady. V druhé etapě se odhaduje struktura díla určující složitost matice frekvenčních přenosů $\boldsymbol{G}_m \approx \boldsymbol{G}_m(\boldsymbol{c}, f)$ jeho matematického modelu. Zde $\boldsymbol{c}$ jsou jsou parametry systému a f je frekvence. K tomu lze s výhodou využít předběžné informace o tvaru frekvenčních přenosů a počtu výrazných rezonancí v nich. K přechodu z časové oblasti do frekvenční se použije diskrétní konečná Fourierova transformace, obvykle ve verzi FFT. V poslední etapě se numerickými postupy určují neznámé „koeficienty" – parametry díla. Všechny etapy nemusí probíhat v reálném čase zkoušky, pokud výsledky identifikace neslouží k okamžitému regulačnímu zásahu.

Metody pro identifikaci diskrétních soustav dělíme na přímé a nepřímé.



Obr. 1. Proces identifikace

2 Přímá identifikace SISO systémů

Problém identifikace jednoduchých systémů s jedním vstupem a jedním výstupem, SISO systémů, se objevil před více jak 50 lety v letectví a automatickém řízení. Uveďme dále dvě metody odhadu parametrů SISO systému z jeho měřeného frekvenčního přenosu $G(p)$, kde $p = i2\pi f$.

2.1 Lineární regrese s iterací

Frekvenční přenos matematického modelu lineárního SISO systému má tvar

$$G_m(p) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_j\, p^j}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j\, p^j}\,. \tag{1}$$

Koeficient b_0 se obvykle volí jako $b_0 = 1$.

Dosadíme-li hodnoty měřeného frekvenčního přenosu pro všechny budící frekvence f_k do sloupcového vektoru $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$, potom rozdíl mezi matematickým modelem a měřením charakterizuje vektor reziduí

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}), \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{p})$ je vektor náhradního frekvenčního přenosu při stejných frekvencích jako u $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$. Pro k-tou frekvenci potom platí

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_j\, p_k^j}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j\, p_k^j} - G(p_k) = r_k\,; \qquad i = 1,\, 2,\, \ldots \tag{3}$$

Přímé řešení tohoto problému lineární regresí není možné, protože neznámé koeficienty a_j jsou ve jmenovateli zlomku. Rovnici (3) je však možno jím pronásobit a dostat tak vztah

$$\sum_{j=0}^{n} a_j\, p_k^j\, G(p_k) - \sum_{j=1}^{m} b_j\, p_k^j = 1 - r_k \underbrace{\sum_{j=0}^{m} a_j\, p_k^j}_{w_k}, \tag{4}$$

ve kterém jsou neznámé koeficienty a_j a b_j na levé straně rovnice již v lineární vazbě. Rovnici (4) přepíšeme do tvaru skalárního součinu

$$\left[\, G(p_k),\ p_k\, G(p_k)\,, \cdots, p_k^n\, G(p_k) \,|\, -p_k\,, -p_k^2\,, \ldots, -p_k^m \right] \left[\begin{array}{c} a_o \\ \vdots \\ a_n \\ \hline b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right] \doteq 1\,. \tag{5}$$

Při změně frekvence na všechny f_k vznikne soustava komplexních lineárních algebraických rovnic

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y} \tag{6}$$

s řešením optimálním ve smyslu metody nejmenších čtverců („+“ v exponentu značí pseudoinverzi)

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{y} \tag{7}$$

obsahujícím hledané neznámé koeficienty. Tento postup v podstatně jednodušší verzi naznačil již Monastyršin [1]. Takto získané koeficienty však neodpovídají minimu funkce, sumy kvadrátů reziduí, $\boldsymbol{r}^H\boldsymbol{r}$, ale $\boldsymbol{r}^H\,\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{r}$, kde $\boldsymbol{W}$ je matice neznámých vah měření o prvcích w_k a exponent H hermitovskou transpozici. Mohou proto sloužit jen za první přiblížení skutečným koeficientům.

Neznámou váhu w_k můžeme zčásti kompenzovat v iteracích, dělíme-li v l+první iteraci celou rovnici vahou $w_k^{(l+1)} = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(l)}\, p_k^j$. Pokud bude iterační proces konvergovat, bude se $w_k/w_k^{(l+1)}$ blížit k jedničce a potom

$$\underbrace{\frac{w_k}{w_k^{(l+1)}}}_{\approx 1}\, r_k^{(l+1)} = G(p_k)\, \underbrace{\frac{w_k}{w_k^{(l+1)}}}_{\approx 1} - \underbrace{\frac{1}{w_k^{(l+1)}} \sum_{j=0}^{m} b_j^{(l+1)}\, p_k^j}_{\approx G_m(p_k)} \tag{8}$$

se bude blížit skutečné chybě náhrady k-tého měření.

Výhodou této metody je obvykle velmi rychlá konvergence. Při tom se pro optimalizaci vystačí s pseudoinverzí. Její nevýhodou však je, že nalezené koeficienty a_j a b_j nemusí být fyzikálně realizovatelné, a že jim odpovídající matematický model nemusí být stabilní. Příčinou tohoto stavu mohou být velké měřicí chyby a čistě geometrický přístup k nim bez omezení kladených na koeficienty.

2.2 Nelineární regrese

Aby výsledný matematický (regresní, zidentifikovaný) model byl stabilní, je zapotřebí klást na jeho koeficienty jisté požadavky. To však nebylo dobře možné v linearizovaném případě. Problém identifikace lze však řešit i jako optimalizační úlohu s omezeními. Za tím účelem postavme poněkud modifikovaný model, který vyplyne z rovnice (1) po rozkladu čitatele i jmenovatele v součin trojčlenů

$$G_m(p) = G_m(0) \prod_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{1 + c_j\, p + d_j\, p^2}{1 + a_j\, p + b_j\, p^2}\,, \tag{9}$$

kde $G_m(0)$ je hodnota frekvenčního přenosu při nulové budící frekvenci, a kde některé z koeficientů a_j, b_j, c_j, d_j (rozdílných od předešlé metody) jsou případně známé (např. nulové). Pak pro chybu náhrady r_k při i-té budící frekvenci lze psát

$$G_m(p_k) - G(p_k) = r_k\,. \tag{10}$$

Pro všechny budící frekvence se z reziduí sestaví vektor-sloupec $\boldsymbol{r}$. Omezíme-li se na řešení optimální ve smyslu nejmenších čtverců, mohli bychom za kriteriální (cílovou) funkci, kterou budeme minimalizovat, zvolit

$$S_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{r}^H\boldsymbol{r}\,, \tag{11}$$

která by bez dalších podmínek mohla vést také k nestabiním systémům. Je však známo, že stabilní systémy mají koeficienty a_j a b_j, ovlivňující polohu a „mohutnost“ pólů (vlastní čísla), kladné. Stejné podmínky můžeme klást na koeficienty c_j a d_j ovlivňující polohu nul. Potom je účelné zavést za neznámé koeficienty kvadráty nových neznámých totiž $a_j = \alpha_j^2$, $b_j = \beta_j^2$, $c_j = \gamma_j^2$, $d_j = \delta_j^2$ a postavit novou cílovou funkci

$$S_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{r}^H \boldsymbol{r} \,. \tag{12}$$

Takto zidentifikované systémy jsou již stabilní.

3 Přímá identifikace MIMO systémů [2]

Chování lineárního diskrétního dynamického systému s mnoha vstupy a mnoha výstupy v čase lze popsat soustavou obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Tak např. diferenciální rovnice

$$\boldsymbol{M}\, \ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{B}\, \dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{f}(t) \tag{13}$$

s maticí hmot $\boldsymbol{M}$, maticí koeficientů útlumu $\boldsymbol{B}$, maticí tuhostí $\boldsymbol{K}$, vektorem buzení $\boldsymbol{f}$ a vektorem odezev $\boldsymbol{q}$ popisuje pohyb lineární diskrétní mechanické soustavy. Po Fourierově transformaci této rovnice s nulovými počátečními podmínkami dostaneme pro $p = i2\pi f$ rovnici

$$\underbrace{\left[p^2 \boldsymbol{M} + p\, \boldsymbol{B} + \boldsymbol{K} \right]}_{\boldsymbol{Z}(p)} \boldsymbol{q}(p) = \boldsymbol{f}(p) \,, \tag{14}$$

v níž $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})$ je vektor Fourierových obrazů budicích sil, $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p})$ vektor obrazů buzení a $\boldsymbol{Z}(p)$ maticí dynamických tuhostí. Matice k ní inverzní,

$$\boldsymbol{G}(p) = \boldsymbol{Z}^{-1}(p), \tag{15}$$

kterou lze relativně snadno měřit, se nazývá maticí frekvenčních přenosů nebo frekvenčních odezev, anebo i maticí dynamických poddajností. Rovnost ze vztahu (15) lze využít k odvození dvou přímých metod.

3.1 Součinová metoda

Tato metoda je založena na vzájemné inverznosti matic dynamických poddajností a tuhostí. Z této podmínky pro měřené $\boldsymbol{G}(p)$ a hledané $\boldsymbol{Z}(p)$ plyne

$$\boldsymbol{G}(p)\, \boldsymbol{Z}(p) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{R}(p), \tag{16}$$

kde $\boldsymbol{R}(p)$ je matice reziduí. Rozepíšeme-li poslední rovnici pro k-tou budící frekvenci f_k, dostaneme

$$\left[p_k^2\, \boldsymbol{G}(p_k),\ p_k\, \boldsymbol{G}(p_k),\ \boldsymbol{G}(p_k) \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \doteq \boldsymbol{I} \,, \tag{17}$$

kterou pro všechny měřené frekvence f_k, $k = 1, ..., K$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1^2\, \boldsymbol{G}(p_1), & p_1\, \boldsymbol{G}(p_1), & \boldsymbol{G}(p_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_K^2\, \boldsymbol{G}(p_K) & p_K\, \boldsymbol{G}(p_K), & \boldsymbol{G}(p_K) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{K} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}} \doteq \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \vdots \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Y}} . \tag{18}$$

Matice $\boldsymbol{A}$ soustavy je obvykle obdélníková, a proto přibližné řešení ve smyslu metody nejmenších čtverců má tvar:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^+ \boldsymbol{Y} \,. \tag{19}$$

3.2 Rozdílová metoda

Tato rovněž přímá metoda je založena na faktu, že

$$\boldsymbol{Z}(p) - \boldsymbol{G}^{-1}(p) = \boldsymbol{R}(p) \,. \tag{20}$$

Podobným postupem jako u součinové metody dostaneme maticovou rovnici pro k-tou frekvenci

$$\left[p_k^2\, \boldsymbol{I},\ p_k\, \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{I} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \doteq \boldsymbol{G}^{-1}(p_k) \,. \tag{21}$$

Pro všechny měřené frekvence dostane rovnice nový tvar

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1^2\boldsymbol{I} & p_1\boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{I} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_K^2\boldsymbol{I} & p_K\boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{K} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}} \doteq \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}^{-1}(p_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{G}^{-1}(p_K) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Y}} \tag{22}$$

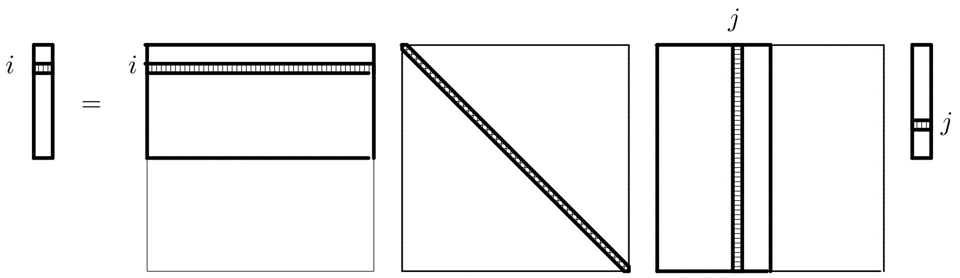
se stejným řešením (19) jako v případě součinové metody.

4 Nepřímá identifikace SISO systémů

Jde o častou úlohu, při níž máme z měřeného frekvenčního přenosu určit vlastní čísla pozorovaného objektu a jeho citlivost na dané buzení. Je známo, že obrazy odezev jsou závislé na obrazech buzení podle vztahu

$$\boldsymbol{q}(p) = \underbrace{\boldsymbol{V}_q\,[\,p\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}\,]^{-1}\boldsymbol{W}_q^H}_{\boldsymbol{G}(p)}\,\boldsymbol{f}(p)\,, \tag{23}$$

v němž $\boldsymbol{S}$ je spektrální matice, na jejíž diagonále leží vlastní čísla matematického modelu a $\boldsymbol{V}_q$ a $\boldsymbol{W}_q$ jsou výchylkové submatice modálních matic $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}$. Pozorujeme-li objekt pouze v místě i při buzení v místě j, nastane situace vyjádřená následujícím schématem:



$\boldsymbol{q}(p)$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{V}_q$ $\qquad\qquad$ $[\,p\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}\,]^{-1}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{W}_q^H$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{f}(p)\,.$

Již z něj je patrno, že odezva bude obsahovat příspěvky všech tvarů kmitu, protože se v ní uplatní celá diagonální matice s póly. Označíme-li vektor-řádku matice symbolem transpozice, můžeme odezvu $q_i(p)$ zapsat také jako

$$\begin{aligned} q_i(p) &= \boldsymbol{v}_i^T[\,p\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}\,]^{-1}\left(\boldsymbol{w}_j^T\right)^H \\ &= f_j(p)\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{v_{i\nu}\,w_{j\nu}^C}{p - s_\nu} \;=\; f_j(p)\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{a_{ij\nu}}{p - s_\nu}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Je-li buzení harmonické o jednotkové mohutnosti, představuje suma v této rovnici (ij)-tý prvek $g_{ij}(p)$ matice frekvenčních přenosů $\boldsymbol{G}(p)$. Objekt potom identifikujeme nalezením vlastních čísel s_ν a jim odpovídajících citlivostí $a_{ij\nu}$. Při identifikaci vycházíme z dílčího frekvenčního přenosu $g_{ij}(p)$ měřeného ve frekvenčním intervalu pokrývajícím vlastní čísla o indexech ν_a až ν_b podle vztahu

$$g_{ij}(p) \doteq \sum_{\nu=\nu_a-1}^{\nu_b+1}\frac{a_{ij\nu}}{p - s_\nu}\,. \tag{25}$$

Pro nalezení neznámých s_ν a $a_{ij\nu}$ použil Kozánek [3] stabilizovanou Newtonovu-Raphsonovu metodu pro minimalizaci sumy kvadrátů reziduí

$$r_{ij}(p_k) \;=\; \sum_{\nu=\nu_a-1}^{\nu_b+1}\frac{a_{ij\nu}}{p_k - s_\nu} \;-\; g_{ij}(p_k)\,. \tag{26}$$

Formule ukazují, že budeme identifikovat o dvě vlastní čísla více, než byla v měřeném intervalu. Důvodem je potřeba korigovat příspěvky vlastních frekvencí, ležících vně měřeného frekvenčního intervalu.

Vektory neznámých regresních koeficientů jsou

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{a} \end{bmatrix}\,,\ \text{kde}\ \ \boldsymbol{s} = [s_\nu] \quad \text{a}\ \ \boldsymbol{a} = [a_{ij\nu}]\,,\ \ \nu = \nu_a{-}1, \cdots, \nu_b{+}1\,. \tag{27}$$

Gradientní metody optimalizace potřebují Jacobiovu matici $\boldsymbol{J} = \partial \boldsymbol{r} / \partial \boldsymbol{c}$, která má řádky odpovídající k-té měřené frekvenci

$$\boldsymbol{J} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \dfrac{a_{ij\nu}}{(p_k - s_\nu)^2} & \cdots & \cdots & \dfrac{1}{p_k - s_\nu} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right] . \tag{28}$$

Je zřejmé, že pro výpočet matice $\boldsymbol{J}$ je zapotřebí znát dobré odhady neznámých parametrů $\boldsymbol{c}$. Za předpokladu, že jsou vlastní čísla dobře separovaná, lze s_ν a $a_{ij\nu}$ odhadnout z průběhu frekvenčního přenosu v okolí rezonancí. Je-li v okolí ν-té rezonance při respektování ostatních vlastních čísel posunutím počátku o g_ν frekvenční přenos

$$g(p) \doteq \frac{a_\nu}{p - s_\nu} + g_\nu \qquad \Longrightarrow \qquad p = s_\nu + \frac{a_\nu}{g(p)} + \frac{p - s_\nu}{g(p)}\, g_\nu \,, \tag{29}$$

potom pro odhady $\hat{s}_\nu$ a $\hat{a}_\nu$ vlastního čísla s_ν a citlivosti a_ν platí

$$p_k \doteq \left[1,\ \frac{1}{g(p_k)},\ \frac{p_k - s_\nu}{g(p_k)} \right] \begin{bmatrix} \hat{s}_\nu \\ \hat{a}_\nu \\ \hat{g}_\nu \end{bmatrix} . \tag{30}$$

Zvolíme-li frekvenci p_m maximálního modulu frekvenčního přenosu za střední z pětice měření, můžeme koeficienty $\hat{s}_\nu$, $\hat{a}_\nu$ a $\hat{g}_\nu$ určit pomocí pseudoinverze jako

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_\nu \\ \hat{a}_\nu \\ \hat{g}_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,, & \dfrac{1}{g(p_{m-2})}\,, & \dfrac{p_{m-2} - s_\nu}{g(p_{m-2})} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1\,, & \dfrac{1}{g(p_{m+2})}\,, & \dfrac{p_{m+2} - s_\nu}{g(p_{m+2})} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} p_{m-2} \\ \vdots \\ p_{m+2} \end{bmatrix} . \tag{31}$$

Za zatím neznámé vlastní číslo s_ν ve třetím sloupci pseudoinvertované matice lze zprvu použít pouze jeho hrubý odhad p_m z budící frekvence f_m příslušející rezonančnímu vrcholu. Ten pak lze dále zpřesnit pomocí právě nalezeného $\hat{s}_\nu$. Fiktivní (korekční) vlastní čísla odhadujeme stejným způsobem, avšak tentokrát z krajních pěti (tří) bodů měření. Nakonec proběhne cyklus iterací (l), v nichž se zpřesňuje předchozí odhad $\boldsymbol{c}^{(l)}$ na

$$\boldsymbol{c}^{(l+1)} = \boldsymbol{c}^{(l)} - \boldsymbol{J}^+ \boldsymbol{r}^{(l)} \,. \tag{32}$$

Poznámka:

Jacobiovu matici lze relativně snadno zkonstruovat za pomoci matice $\boldsymbol{A}_1$ o tvaru

$$\boldsymbol{A}_1 \ = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{p_1 - s_{\nu_a - 1}}\,, & \cdots\,, & \dfrac{1}{p_1 - s_{\nu_b + 1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{p_K - s_{\nu_a - 1}}\,, & \cdots\,, & \dfrac{1}{p_K - s_{\nu_b + 1}} \end{bmatrix} \tag{33}$$

a z ní odvozené matice $\boldsymbol{A}_2$, která má za prvky kvadráty prvků matice $\boldsymbol{A}_1$. Potom

$$\boldsymbol{J} = [\, \boldsymbol{A}_2 \operatorname{diag}(\boldsymbol{a})\,,\ \boldsymbol{A}_1 \,] \,. \tag{34}$$

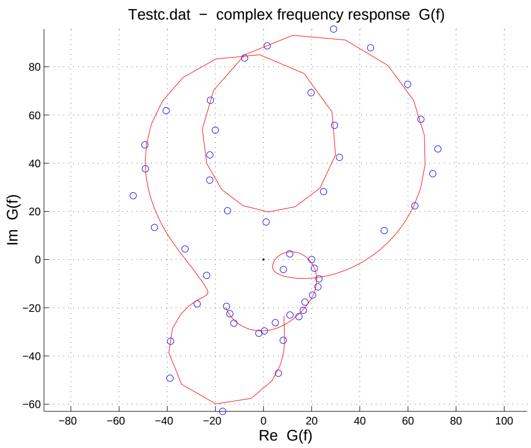
Kromě toho navíc vektor aproximací hodnot frekvenčních přenosů zjištěných při všech budicích frekvencích $\boldsymbol{p}$ bude

$$\boldsymbol{g}_{ij}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{a} \,. \tag{35}$$

4.1 Příklad

Na vedlejším obrázku je výsledek identifikace mechanického systému z měřeného frekvenčního přenosu.

Dále je uveden program v jazyku `MATLAB`, který identifikuje SISO systém. Popis vstupních i výstupních parametrů je uveden v záhlaví M-funkcí. Funkce `inp.m`, `fig.m` a `loadmx.m` byly prezentovány již dříve [7]. Je vhodné si povšimnout, jakým způsobem byla vytvořena již zmíněná matice $\boldsymbol{A}_1$ v modulu `IdeSISO.m`.

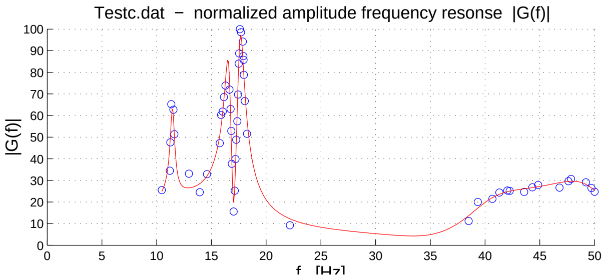


Obr. 2. Identifikace SISO systému

```
>> ident
          file = Testc.dat =>
          scalex(x_1) -> f [Hz] = 1/60 =>
          scale(x_{2,3} = ones(size(f)) =>
          weight = f =>
          f_o =    -1.0000 =>

 k    Re s     Im s     Re f    Im f      Q

 1   -1.33    71.94    11.45   -0.21   27.14
 2  -18.24    70.53    11.22   -2.90    2.00
 3   -2.05   104.57    16.64   -0.33   25.55
 4   -2.28   110.53    17.59   -0.36   24.20
 5  -22.37   251.90    40.09   -3.56    5.65
 6  -19.84   315.03    50.14   -3.16    7.96
 7  -32.15   314.88    50.12   -5.12    4.92
```



Obr. 3. Identifikovaná $|G(f)|$

Identifikace náhodně vybraného měřeného frekvenčního přenosu mechanické soustavy se uskutečnil dále uvedeným programem. Vlastní identifikaci zajišťuje M-funkce `IdeSISO.m`, která po nalezení počátečních odhadů volá funkci `lsqnonlin` z Optimization Toolboxu.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   Ident.M
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all

file = inp('file','Testc.dat');
x = loadmx(file);

sclf = eval(inp('scalex(x_1) -> f [Hz]', '1/60'));
f = x(:,1)*sclf;

sclx = eval(inp('scale(x_{2,3}','ones(size(f))'));
g    = (x(:,2)+i*x(:,3)).*sclx;
g    = 100/max(abs(g))*g;

wght = eval(inp('weight','f'));
pk   = inp('f_o',-1);
if length(pk)>1 | pk>0, pk=pk*sclf; end

[go,s,a,ho,ns,output] = ideSISO(g,f,pk,wght);
%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
df = (f(end)-f(1))/500;
ff = (f(1):df:f(end))';
N  = length(ff);
Gf = 1./(i*diag(2*pi*ff)*ones(N,ns) - ones(N,ns)*diag(s))*a + ho;

fig(8);
hold on;
plot(0,0)
plot(f,abs(g),'o', ff,abs(Gf),'r')
grid
xlabel('f    [Hz]','Fontsize',14)
ylabel('|G(f)|','Fontsize',14)
title([file '  -  normalized amplitude frequency resonse  |G(f)|'],'Fontsize',14)

fig(4);
axis('equal')
hold on;
plot(g,'o');
plot(0,0,'.k')
plot(Gf,'-r'); grid;
xlabel('Re  G(f)','Fontsize',14)
ylabel('Im  G(f)','Fontsize',14)
title([file '  -  complex frequency response  G(f)'],'Fontsize',14)

s = sort(s);
Q = abs(s)./(-2*real(s));
fprintf('\n k     Re s     Im s     Re f     Im f    Q\n')
for k = 1:ns
    fprintf('\n%2d %8.2f %8.2f %8.2f %7.2f %7.2f',...
        k, real(s(k)), imag(s(k)), imag(s(k))/2/pi, real(s(k))/2/pi, Q(k));
end


%================================================================

function [f,J] = FunJ(x,wght)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global go om N ns ia

A = 1../(i*diag(om)*ones(N,ns)-ones(N,ns)*diag(x(1:ns)));
J = [A.^2*diag(x(ia)), A, ones(size(om))].*(wght*ones(1,2*ns+1)); %   Jacobian matrix
f = (A*x(ia)-go+x(end)).*wght;            %              vector of weighted residuals
```

```
%==============================================================
%
% IDESISO.M     Evaluation of eigenvalues, power factors and
% ~~~~~~~~~     correction terms
%
%  [go,s,a,ho,ns,output] = ideSISO(g,f,K,wght)
%  ~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
%
%     g       column vector of frequency response G(f) samples
%     f       column vector of excitation frequencies [Hz]
%     ep      scalar <0 peak tolerance, >0 subscript of a single peak
%             vector = subscripts of peaks within interval of f
%     wght    column vector of measurement weights
%
%     go      identified frequency response
%     s       vector-column s(i) of eigenvalues
%     a       vector-column a(i) of participation factors
%     ho      scalar, correction ofthe  coordinate origin position
%     ns      number of eigenvalues
%     output  information about the optimization

function [go,s,a,ho,ns,output] = ideSISO(g,f,ep,wght)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global go om N ns ia

go = g;         %           samples of frequency response G(f)
om = 2*pi*f;    %           excitation frequency omega
N  = length(g); %           number of samples of G(f)
if length(ep)==1 & ep<0 %   seek peaks?
   [X,I,K] = peaks(abs(g),-ep);
else
   I = zeros(size(ep));
   for k = 1:length(ep)
       df = f-ep(k);
       for j=1:N
           if df(j)>0, break, end
       end
       I(k) = j;
       if abs(df(j-1))<df(j), I(k)=I(k)-1; end
   end
end
I  = [1 I N];   %           positions of peaks & borders
ns = length(I); %           number of peaks
ia = ns+1:2*ns;
x  = zeros(ns,1);
if nargin<4, wght = ones(N,1); end
%
%                           Initial estimate of eigenvalues s(n):
for n = 1:ns
    j = I(n)-2;
    if j<1, j = 1;
    elseif j>N-4, j = N-4;
    end
    k = j+4;
    p = [ones(5,1), 1../g(j:k), i*(om(j:k)-om(j+2))./g(j:k)]\om(j:k);
    p = [ones(5,1), 1../g(j:k), i*(om(j:k)-p(1))./g(j:k)]\om(j:k);
    x(n) = i*p(1); %        eigenvalue estimate
end
x = -abs(real(x))+i*imag(x);
A = 1../(i*diag(om)*ones(N,ns)-ones(N,ns)*diag(x(1:ns)));
x  = [x; A\g; 0]; %         initial estimates of s(n) & a(n)

dom = 0.1*om(N);
lb = zeros(ns,1)-dom;
ub = ones(ns,1)*om(N)+dom;
options = optimset('Jacobian','on', 'disp','none');

[x,resnorm,residual,flg,output] = lsqnonlin('FunJ',x,lb,ub,options,wght);
%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

s  = x(1:ns); %             eigenvalues
a  = x(ia); %               participation factors
ho = x(end); %              origin correction
s  = -abs(real(s))+i*imag(s);
ns = length(s);
go = 1./(i*diag(om)*ones(N,ns) - ones(N,ns)*diag(s))*a + ho;


%==============================================================
%
% PEAKS.M        Finds peaks of |G|
% ~~~~~~~
%   G    columns of G(f)
%   Tol  peak tolerance
%
```

```
%   X    row of peak values
%   I    row of indeces of all sum(abs(G)) peaks
%   K    row of indeces of sum(abs(G)) peaks > tol*abs(G)
%   N    lengtG of time series

function [X,I,K,N] = peaks(G,tol)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[N,mn] = size(G);
if mn==1,
   aG = abs(G(:)); %          Column
else
   aG = sum(abs(G.').'); %    Columns
end
G(2:N-1) = (aG(1:N-2)+3*aG(2:N-1)+aG(3:N))/5;
I = 1:N;
I  = I(G(2:N-1)>G(1:N-2) & G(2:N-1)>G(3:N))+1;
G = -G;
J = 1:N;
J  = J(G(2:N-1)>G(1:N-2) & G(2:N-1)>G(3:N))+1;
G  = -G;
if G(2)>G(1),   J=[1 J]; end
if G(N-1)>G(N), J=[J N]; end
ij = min(length(I),length(J));
K = 1:N;
K = K(max(abs((G(I(1:ij))-G(J(1:ij)))./G(I(1:ij))), ...
      abs((G(I(1:ij))-G(J(2:ij+1)))./G(I(1:ij))))>tol);
K = I(K);
X = G(K);
```

5 Nepřímá identifikace MIMO systémů

Identifikace systémů s mnoha vstupy a mnoha výstupy je mnohem složitější problém než u systémů s jedním vstupem a jedním výstupem. Budí se i měří ve více místech a to buď současně nebo i v etapách po sobě. Zpracováním experimentálních dat se má získat jedna spektrální matice $\boldsymbol{S}$ a dvě matice modální $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}$. Existuje řada metod, které lze najít v literatuře (viz např. [4], [5]). Uveďme zde jednu relativně novou kompaktní metodu, která na rozdíl od dosud probíraných, pracujících na frekvenční oblasti, je založena na analýze matice impulzních odezev, tedy na informaci z časové oblasti. Jak bylo řečeno výše, je matice impulzních odezev $\boldsymbol{G}(t)$ originálem k matici frekvenčních přenosů $\boldsymbol{G}(p)$.

Obvyklým výstupem z dynamických experimentů bývá serie matic frekvenčních přenosů (dynamických poddajností) $\boldsymbol{G}(p)\,\epsilon\,\mathcal{C}^{m,n}$. Ty lze získat nejrůznějšími technikami měřením odezev objektu v m místech na libovolné buzení působící na objekt v n bodech. Není rozhodující, zda bylo harmonické, impulzní, přechodové nebo náhodné, anebo zda bylo aplikováno postupně v jednotlivých bodech konstrukce, anebo současně v případě náhodného buzení.

Matice frekvenčních přenosů lze vyjádřit dvěma způsoby:

$$\boldsymbol{G}(p) \;=\; [\,p^2\boldsymbol{M} + p\boldsymbol{B} \,+\, \boldsymbol{K}\,]^{-1} \;=\; \boldsymbol{V}\,[\,p\boldsymbol{I} \;-\boldsymbol{S}\,]^{-1}\,\boldsymbol{W}^H\,, \tag{36}$$

kde modální matice $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}\,\epsilon\,\mathcal{C}^{m^*,2m^*}$ obsahují vlastní vektory výchylek, a spektrální matice $\boldsymbol{S}\,\epsilon\,\mathcal{C}^{2m^*,2m^*}$ vlastní čísla na diagonále. Z matice $\boldsymbol{G}(p)$ lze zpětnou Fourierovou transformací získat matici impulzních odezev

$$\boldsymbol{G}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{G}\,(p)\,\mathrm{e}^{+pt}\mathrm{d}f \;=\; \boldsymbol{V}\exp(\boldsymbol{S}t)\,\boldsymbol{W}^H\,. \tag{37}$$

Protože výsledkem experimentu nejsou spojité funkce, ale časové, příp. frekvenční řady závislé na vzorkovací periodě T, nahražuje se obyčejná Fourierova transformace její diskrétní konečnou verzí (DFT, IDFT). Ať výsledkem experimentu je časová řada matic impulzních odezev odebraných s pevnou periodou vzorkování T o tvaru

$$\boldsymbol{G}(kT) \;=\; \boldsymbol{V}\exp(k\boldsymbol{S}T)\,\boldsymbol{W}^H, \qquad k\;=0,\ldots,N-1\,, \tag{38}$$

kde N je celkový počet submatic $\boldsymbol{G}(kT)$, tedy i vzorků v každém prvku této maticové časové řady.

5.1 Vlastní čísla

Odezva $\boldsymbol{q}(t)$ na libovolné buzení $\boldsymbol{f}(t)$ je konvolucí impulzní odezvy $\boldsymbol{G}(t)$ s $\boldsymbol{f}(t)$, tedy

$$\boldsymbol{q}(t) \;=\; \boldsymbol{G}(t) * \boldsymbol{f}(t) \;=\; \int_0^t \boldsymbol{G}(\tau)\,\boldsymbol{f}(t-\tau)\,d\tau \;=\; \int_0^t \boldsymbol{G}(t-\tau)\,\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau\,. \tag{39}$$

V diskrétní verzi lze odezvu soustavy vyjádřit s využitím posledního vztahu jako

$$\boldsymbol{q}(kT) \;=\; T\sum_{\kappa=0}^{k}\boldsymbol{G}((k-\kappa)T)\,\boldsymbol{f}(\kappa T) \;=\; T\boldsymbol{V}\sum_{\kappa=0}^{k}\exp((k-\kappa)\boldsymbol{S}T)\,\boldsymbol{W}^H\,\boldsymbol{f}(\kappa T)\,. \tag{40}$$

Pokud bychom použili postupně n libovolných nezávislých buzení v n vybraných bodech objektu, dostali bychom maticovou časovou řadu buzení $\boldsymbol{F}(\kappa T) \in \mathcal{R}^{n,n}$ a jí odpovídající maticovou časovou řadu odezev $\boldsymbol{Q}(kT) \in \mathcal{R}^{m,n}$:

$$\boldsymbol{Q}(kT) \;=\; T\sum_{\kappa=0}^{k} \boldsymbol{G}((k-\kappa)T)\,\boldsymbol{F}(\kappa T) \;=\; T\boldsymbol{V}\sum_{\kappa=0}^{k} \exp((k-\kappa)\boldsymbol{S}T)\,\boldsymbol{W}^{H}\,\boldsymbol{F}(\kappa T)\,. \tag{41}$$

Předpokládejme nyní, že za buzení byly užity Diracovy impulzy. V diskrétním modelu to znamená, že $\boldsymbol{F}(0) = \boldsymbol{I}_n$ a $\boldsymbol{F}(\kappa T) = \boldsymbol{O}_n$ pro $\kappa > 0$.

Hledejme nyní taková buzení $\boldsymbol{F}(\kappa T)$, všechna řádu n, která budou schopna systém vybuzený v čase $t=0$ serií impulzů $\boldsymbol{F}(0)=\boldsymbol{I}_n$ uvést do klidu v následujících p vzorkovacích periodách, tedy způsobit, že odezva na počáteční impulzy $\boldsymbol{F}(0)$ bude po následujícím fiktivním buzení $\boldsymbol{F}(\kappa T)$, $\kappa=1,\ldots p$, již nulová, t.j. že $\boldsymbol{Q}(kT)=\boldsymbol{O}_{m,n}$ pro $k=p,\, p+1,\,\ldots$. Teoreticky by pro mechanickou soustavu popsanou rov. (13) mohlo být $p=2$, pokud by se buzení aplikovalo ve všech stupních volnosti a systém byl řiditelný. Protože každému stupni volnosti patří jedna vlastní frekvence a té pak dvě vlastní čísla, lze minimální počet period pro zastavení rozkmitaného systému stanovit jako

$$p \geq \frac{2\,n_f}{n} = \frac{n_e}{n}\,, \tag{42}$$

kde n_f je počet vlastních frekvencí v pozorovaném frekvenčním pásmu a n_e jim odpovídající počet vlastních čísel. Rozepíšeme-li podmínku pro $\boldsymbol{Q}(kT) = \boldsymbol{O}_{m,n}$ pro $k = p,\, p+1,\,\ldots$, dostaneme systém rovnic, v němž $\boldsymbol{G}_k = \boldsymbol{G}(kT)$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{p+1}\,, & \boldsymbol{G}_{p}\,, & \cdots\,, & \boldsymbol{G}_{1} \\ \boldsymbol{G}_{p+2}\,, & \boldsymbol{G}_{p+1}\,, & \cdots\,, & \boldsymbol{G}_{2} \\ \vdots\,, & \vdots\,, & , & \vdots \\ \boldsymbol{G}_{N-1}\,, & \boldsymbol{G}_{N-2}\,, & \cdots\,, & \boldsymbol{G}_{N-p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{F}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{m,n} \\ \boldsymbol{O}_{m,n} \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}_{m,n} \end{bmatrix}, \tag{43}$$

ze kterého lze již snadno vypočítat matice zatím neznámého fiktivního buzení $\boldsymbol{F}_\kappa = \boldsymbol{F}(\kappa T)$, $\kappa=1,\ldots,p$ jako

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{p}\,, & \boldsymbol{G}_{p-1}\,, & \cdots\,, & \boldsymbol{G}_{1} \\ \boldsymbol{G}_{p+1}\,, & \boldsymbol{G}_{p}\,, & \cdots\,, & \boldsymbol{G}_{2} \\ \vdots\,, & \vdots\,, & , & \vdots \\ \boldsymbol{G}_{N-2}\,, & \boldsymbol{G}_{N-3}\,, & \cdots\,, & \boldsymbol{G}_{N-p-1} \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{p+1} \\ \boldsymbol{G}_{p+2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{G}_{N-1} \end{bmatrix}, \tag{44}$$

kde symbol „+“ u obdélníkové matice vyznačuje pseudoinverzi.

Z druhé části transponované rovnice (41) vyplývá, že pro vynulované odezvy od periody $p+1$ lze s využitím diagonálnosti matice $\boldsymbol{S}$ také psát

$$\left[\ \boldsymbol{I}_n\,,\ \boldsymbol{F}_1^T\,,\ \boldsymbol{F}_2^T\,,\cdots,\ \boldsymbol{F}_p^T\ \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}\exp((p+1)\boldsymbol{S}T) \\ \boldsymbol{W}\exp(p\boldsymbol{S}T) \\ \vdots \\ \boldsymbol{W}\exp(\boldsymbol{S}T) \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_n\,. \tag{45}$$

Při tom jsme mlčky vynásobili celou rovnici zleva regulární maticí $\boldsymbol{V}^{+}/T$. Zavedeme-li pro submatice neznámých symboly

$$\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{W}\,\exp(k\boldsymbol{S}T)\,, \tag{46}$$

můžeme rovnici (45) přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{F}_1^T\,, & -\boldsymbol{F}_2^T\,, & \cdots\,, & -\boldsymbol{F}_{p-1}^T\,, & -\boldsymbol{F}_p^T \\ \boldsymbol{I}_n\,, & \boldsymbol{O}_n\,, & & & \\ \boldsymbol{O}_n\,, & \boldsymbol{I}_n\,, & \ddots\,, & & \\ \vdots\,, & & \ddots\,, & \ddots\,, & \\ \boldsymbol{O}_n\,, & \boldsymbol{O}_n\,, & , & \boldsymbol{I}_n\,, & \boldsymbol{O}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_p \\ \boldsymbol{E}_{p-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{E}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{p+1} \\ \boldsymbol{E}_p \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_3 \\ \boldsymbol{E}_2 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Protože ze všech submatic $\boldsymbol{E}_k$ na pravé straně lze vytknout $\exp(\boldsymbol{S}T)$ a tedy psát

$$\boldsymbol{E}_{k+1} = \boldsymbol{E}_k \exp(\boldsymbol{S}T)\,, \tag{48}$$

lze i systém rovnic (47) zapsat zkráceně jako problém vlastních hodnot $\boldsymbol{Z}$ a jim odpovídajících vlastních vektorů $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{Z}\,. \tag{49}$$

Matice vlastních čísel $\boldsymbol{Z} = \exp(\tilde{\boldsymbol{S}}T)$ nemusí být stejného řádu jako $\boldsymbol{S}$, ale bude při vyšším p, než je nezbytně nutné, obsahovat ještě doplňková vlastní čísla nesouvisející s identifikovaným systémem. Stejné platí o matici vlastních vektorů. Po jeho vyřešení určíme z prvních $n_e = 2n_f$ uspořádaných vlastních hodnot z matice $\boldsymbol{Z}$ spektrální matici $\boldsymbol{S}$ původní úlohy identifikovaného systému s využitím rovnice (48) jako

$$\boldsymbol{S} \;= f_s \ln \boldsymbol{Z}\,. \tag{50}$$

Přesnost odhadu spektrální matice $\boldsymbol{S}$ je u přesných dat tím větší, čím větší je hodnota parametru p, ovšem za cenu paměťových nároků rostoucích s p kvadraticky a výpočetního času narůstajícího s p kubicky. Pro data zatížená chybami je však účelné udržovat p co nejnižší, aby se snížilo nebezpečí nalezení nepravých vlastních frekvencí.

5.2 Modální matice

Nejsnáze se vypočte **levostranná** modální matice $\boldsymbol{W}$, které se v hermitovsky transponované formě někdy říká matice participačních faktorů $\boldsymbol{L}$. Název vystihuje její účinek na příspěvek určitých souřadnic vektoru $\boldsymbol{f}(t)$ k jednotlivým tvarům kmitu. Modální matici $\boldsymbol{W}$ vypočteme z rovnice (46) jako

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{E}_p\,[\exp(p\,\boldsymbol{S}T)\,]^+\,. \tag{51}$$

Výpočet **pravostranné** modální matice $\boldsymbol{V}$ lze realizovat různými způsoby. Zatímco při použití metody LSFD popsané v belgickém prameni [5] a užité v Peškově práci [6] se přechází do frekvenční oblasti, v proceduře `Gt2SVW` zpracované rovněž v MATLABu se i pro odhad pravostranné modální matice zůstává v časové oblasti (viz [8] nebo `www.cdm.cas.cz`). Za tím účelem se z rovnice (38) vytvoří pro $k = 0, 1, \cdots, N-1$ přeurčený systém algebraických rovnic, ze kterého se získá řešení ve smyslu metody nejmenších čtverců ve tvaru

$$\boldsymbol{V} \;= \big[\,\boldsymbol{G}(kT)\,\big]\,\Big[\exp(k\boldsymbol{S}T)\,\boldsymbol{W}^H\Big]^+, \tag{52}$$

v němž výrazy v hranatých závorkách jsou obdélníkové matice vzniklé při k probíhajícím již zmíněný interval. Je snad vhodné zde upozornit, že identifikované modální matice jsou submaticemi úplných modálních matic, protože $\boldsymbol{V} \in \mathcal{C}^{m,n_e}$ a $\boldsymbol{W} \in \mathcal{C}^{n,n_e}$. Pokud by se měly určit celé modální matice, bylo by zapotřebí budit i měřit ve všech stupních volnosti.

6 Závěr

Příspěvek je věnován metodám identifikace lineárních diskrétních dynamických soustav. Uvádí jak metody přímé identifikace, které hledají koeficienty diferenciálních rovnic, tak i nepřímé určené k získávání spektrálně-modálních charakteristik. Vedle teoretických základů je prezentován i matlabovský program pro identifikaci SISO systémů.

Tento příspěvek byl vypracován za finanční podpory MŠMT v rámci projektu výzkumu a vývoje LN00B084.

Literatura

[1] Monastyršin G. J.: Obrabotka eksperimentalnych častotnych charakteristik. Avtomatika i telemechanika, 21, 1960, č.3, 422-428

[2] Balda M.: Identifikace a zpracování měření mechanických soustav. Část II. Výzk. zpráva ŠKODA ÚVZÚ, Sz 3994 V, Plzeň, 1977

[3] Kozánek J.: Vyhodnocení přenosové funkce z naměřených dat. Strojnícky časopis, 33, 1982, č. 3, 281-288

[4] Daněk O.: Identifikační metody v dynamice strojů. Strojnícky časopis, 48, 1997, č.5, 297-314

[5] Heylen W., Lammens S., Sas P.: Modal analysis theory and testing Katholieke Universiteit Leuven, Belgie, 1994

[6] Pešek L.: Polyreferenční identifikace mechanických systémů v časové oblasti. Kolokvium „Diagnostika a aktivní řízení '98", Brno, 1998, 99-104

[7] Balda M.: Užitečné funkce pro MATLAB. Sborník 8. konference MATLAB 2000, Humusoft, Praha, 2000, ISBN 80-7080-401-7, s. 27-34

[8] Balda M.: Identifikace MIMO systémů z impulzních odezev. Sb. konf. ZČU FAV KME „Výpočtová mechanika '99", Nečtiny, 1999, ISBN 80-7072-542-1 s. 19-26

prof. Ing. Miroslav Balda, DrSc.,FEng., Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň; tel. 377 236 415, balda@cdm.it.cas.cz