

METODIKA OPTIMALIZACE KONSTRUKCÍ S POŽADOVANOU ÚNAVOVOU ŽIVOTNOSTÍ

Miroslav Balda ¹

1 Úvod

S koncem roku 1997 skončilo i řešení stejnojmenného tříletého grantového projektu GAČR 101/95/0087. Na rozdíl od dosavadních přístupů k optimalizaci konstrukcí přišel projekt s novou myšlenkou (viz i [1]) vycházející ze skutečnosti, že jakákoliv rozměrová změna má vliv nejen na hmotnost, ale i na tuhost konstrukce, a tím na její dynamické vlastnosti a na rozložení statické i dynamické napjatosti. Protože je známo, že většina lomů má únavový charakter, je zřejmé, že optimální návrh musí dodržet kromě všech parametrů garantovaných z hlediska technologické funkce konstrukce, i její bezporuchovou dobu života a v neposlední řadě i její cenu. Právě doba života je charakteristikou, ve které se kombinují jak pevnostní, tak i dynamické vlastnosti konstrukce.

Deklarovaným cílem projektu byl návrh metodiky optimalizace konstrukce díla použitelný v etapě technické přípravy výroby, tedy v době, kdy veškeré zásahy do konstrukce jsou relativně snadné, rychlé a levné, protože se realizují na matematických modelech. Metodikou se označuje souhrn metod a odborných technik k řešení konkrétních vědeckých problémů i pracovních úkolů. V následujících partiích je podán přehled jednotlivých fází řešení daného projektu s jim příslušejícími metodami.

2 Metodika

Vývoj optimální konstrukce má dále popsané fáze uvedené rovněž ve schematu.

a. Úvodní návrh konstrukce

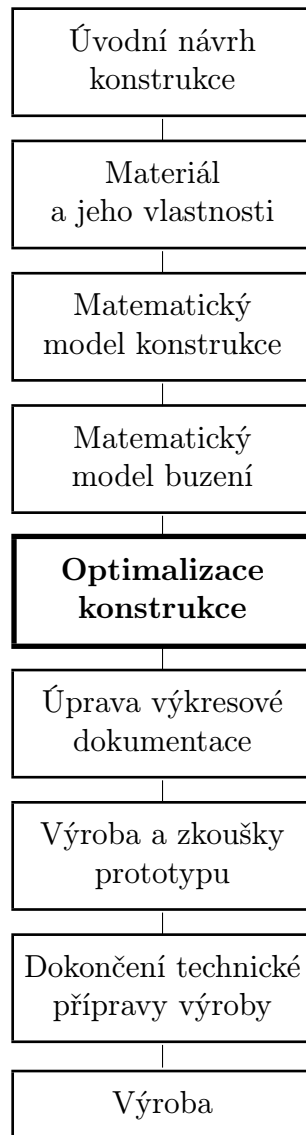
Jde o standardní etapu konstruování, v níž se uplatňuje invence konstruktéra. Jí se zajišťují všechny funkční a výkonové parametry a vytvářejí výchozí údaje o konstrukci. Již v této etapě lze vybrat parametry (např. rozměry), jimiž bude možno řídit vlastnosti výrobku.

b. Materiál a jeho vlastnosti

Výběr materiálu patří mezi velice významné činnosti konstruktéra – technologa, protože jím lze významně ovlivnit výsledné vlastnosti díla. Výběr materiálu je ovšem tak specifická činnost s výrazně diskrétním charakterem možností, že obvykle patří

¹ Prof. Ing. Miroslav BALDA, DrSc., Ústav termomechaniky AVČR & Západočeská univerzita, Velešlavínova 11, 301 14 Plzeň, mbalda@hera.zcu.cz

k činnostem, které se nezahrnují do počítačového systému optimalizace, ale ponechávají se na rozhodnutí člověka. Ten však musí dbát na co možná dokonalou znalost pevnostních i únavových charakteristik materiálu, který navrhuje k použití, tak aby mohly sloužit v procesu optimalizace k výpočtům odhadů poškození. K těmto charakteristikám patří:



- mez pevnosti R_m
- mez pružnosti (kluzu) R_e
- modul pružnosti E
- Wöhlerova křivka
- Haighův diagram
- citlivost materiálu k vrubům
- vliv kvality povrchu na únavu
- vliv velikosti na únavu

Je zřejmé, že stanovení všech těchto údajů vyžaduje dobře organizovaný materiálový výzkum s databází výsledků. Pro účely řešení daného úkolu se provedly nové zkoušky ([18], [20]) a studoval se obecný model výpočtu poškození z uvedených dat (viz [8], [19]).

c. Matematický model konstrukce

Volba matematických modelů se u tvarově složitých konstrukcí vytvořených z kontinuí omezuje na modely skládané z konečných prvků. Jimi se zajišťuje prostorová diskretizace díla do systému o konečném počtu stupňů volnosti jehož chování popisuje systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{L} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_N(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \quad (1)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotností, \mathbf{L} matice složená z útlumové matice a matice gyračních členů, \mathbf{K} tuhostní matice a

$$\mathbf{f}_N(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{f} - \mathbf{f}_n(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$$

je vektor vnějšího působení korigovaného na vliv nelinearit a nestacionarit systému vektorem $\mathbf{f}_n(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$.

I když konečné prvky se volí relativně velké ([9], [11], [12], ...) a bez detailního popisu konstrukčních vrubů, který by značně zkomplikoval model, vychází počet stupňů volnosti velmi velký. To by ve svých důsledcích vedlo na neúnosně dlouhé výpočtové časy při optimalizaci. Tuto nepříznivou vlastnost lze naštěstí do značné míry omezit pomocí redukce počtu stupňů volnosti modelu. Existuje řada metod pro redukci modelů, z nichž uvedme zde alespoň dvě objektivní metody – metodu iterace podprostoru a metodu Lanczosovu ([2], [3]). Jejich objektivnost spočívá v tom, že jakmile uživatel zvolí hloubku redukce, t.j. počet stupňů volnosti redukovaného systému, nemůže dále ovlivnit redukční proces. Naproti tomu metody subjektivní, nazývané také metodami kondenzace, jsou výsledky i po zvoleném počtu stupňů vol-

nosti kondenzované soustavy ovlivněny uživatelskou volbou jejich lokalit v soustavě ([4], [5]).

Kromě prostorové diskretizace se u dynamických úloh diskretizuje i čas. Existuje rovněž řada numerických metod pro integraci obyčejných diferenciálních rovnic, z nichž metoda Newmarkova s lineárním průběhem zrychlení v intervalu vzorkovací periody a metoda maticové exponenciály se ukázaly být nejlepší (viz [3]).

d. Matematický model buzení

Problematika numerického generování zatěžovacích procesů nebyla předmětem citovaného grantového úkolu, protože byla v minulosti již úspěšně vyřešena. Existují v podstatě dva možné přístupy k zavedení buzení do matematického modelu systému. První spočívá ve využití navzorkovaného charakteristického zatěžovacího procesu s případným oměřitkováním. Jde o postup, který je běžný např. u seizmických úloh. V případě druhého přístupu se zatěžovací proces generuje počítačem. Jsou zvládnuty postupy pro vytváření časových řad jak deterministických tak i náhodných budících procesů s požadovanými statistickými charakteristikami jako jsou rozložení, korelační funkce a pod. (viz [31]).

e. Optimalizace konstrukce

Konstrukci označíme za optimální, splní-li následující požadavky:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}^*) &< f(\mathbf{p}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{p}) &\leq \mathbf{0} \quad \epsilon \mathcal{R}^m \\ \mathbf{h}(\mathbf{p}) &= \mathbf{0} \quad \epsilon \mathcal{R}^p, \end{aligned} \tag{2}$$

kde $\mathbf{p} \in \mathcal{R}^m$ je vektor volných konstrukčních parametrů a $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ a $\mathbf{h}(\mathbf{p})$ jsou vektory na ně kladených omezení typu nerovností a rovností. Jde obvykle o úlohu nelineárního programování, protože $f(\mathbf{p})$, $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ a $\mathbf{h}(\mathbf{p})$ bývají nelineárními funkcemi vektoru konstrukčních parametrů \mathbf{p} . Vektor \mathbf{p}^* je vektor z prostoru parametrů \mathbf{p} vymezeného podmínkami $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ a $\mathbf{h}(\mathbf{p})$, při němž cílová funkce nabývá nejmenší hodnotu. S ohledem na výše řečené by jí měla být cena výrobku, anebo zisk z jeho produkce. Obě funkce jsou velice choulostivé, protože závisejí na mnoha v daném okamžiku neznámých parametrech včetně konjunkturálních a marketingových. Mnohem stabilnější charakter má s cenou těsně spjatá vlastnost, totiž hmotnost výrobku, která je závislá na jeho rozměrech a tudíž i na jeho parametrech \mathbf{p} (viz [1], [29], [30]).

Podmínky 1. skupiny, $\mathbf{g}(\mathbf{p})$, budou patrně obsahovat většinu podmínek kladených na konstrukci. Nejdůležitější z nich bude podmínka dodržení garantované doby života L_G . V souladu s rov. (3) bude mít tvar $L(\mathbf{p}) - L_G \geq 0$. Do této skupiny budou patřit i podmínky technologické (vyrobitelnosti, smontovatelnosti, ... [21]).

Podmínky druhé skupiny, $\mathbf{h}(\mathbf{p})$, budou pravděpodobně méně četné. Budou se týkat sjednocování rozměrů ($p_k = p_l$), nebo dodržení normovaných veličin, příp. rozměrů z katalogů ($p_k = q(\mathbf{p})$).

Žádná z dalších fází ze schématu nebyla součástí řešení grantového projektu, a proto se jí zde nebudeme podrobně zabývat. Jen by bylo vhodné na tomto místě upozornit na důležitost experimentálního ověření prototypu. Výpočet optimalizované konstrukce umožní, aby prototyp splňoval požadavky, které na jeho konstrukci byly kladeny v matematickém modelu. Pokud byl model věrný, lze očekávat, že i dílo bude blízké optimálnímu a nebude předimenzováno nebo poddimenzováno. Ovšem celá řada vlastností díla nebyla modelem pokryta. Proto závěrečné experimentální ověření se jeví jako nezbytné.

3 Optimalizační procedura

Protože optimalizační procedura a její součásti mají zásadní význam na řešení, bude jí nyní věnována větší pozornost. Úvodem lze konstatovat, že neexistuje jediná univerzální optimalizační procedura vhodná pro libovolnou úlohu. To je i důvod, proč v jazyku MATLAB, který byl zvolen za jazyk pro realizaci všech zkoušených modulů, existuje dlouhá řada optimalizačních procedur, které jsou shrnuty do speciální knihovny nesoucí název „Optimization Toolbox“. Je pravidelně aktualizována a obsahuje poslední verze nejefektivnějších algoritmů pro optimalizaci.

3.1 Cílová funkce

Na rozdíl od testovacích úloh všech algoritmů je naše úloha velmi komplikovaná a náročná na strojní čas potřebný pro výpočet hodnoty kriteriální funkce a omezení. Proto výběr efektivní procedury představuje polovinu úspěchu řešení. K dispozici jsou v zásadě dvě skupiny procedur. U obou je zapotřebí vypočítat v daném bodě \mathbf{p} prostoru parametrů funkční hodnotu $f(\mathbf{p})$ a u jedné z nich dokonce i hodnotu gradientu $\nabla f(\mathbf{p})$. Metody patřící do této skupiny se označují jako gradientní. Tyto metody mají výhodu spočívající v rychlejší konvergenci řešení, avšak vyžadují, aby cílová funkce $f(\mathbf{p})$ byla hladká a aby se i parametry mohly měnit plynule a bez omezení. Potom ve shodě s předchozí diskusí lze za cílovou funkci volit

$$f(\mathbf{p}) = \sum_i m_i(\mathbf{p}), \quad (3)$$

kde $m_i(\mathbf{p})$ je hmotnost i -tého elementu konstrukce a vektor gradientu je

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \quad (4)$$

Není bez zajímavosti, že pro případ, kdy $p_i = m_i$, bude vektor gradientu složen ze samých jednotek.

S ohledem na diskrétní omezení nebude však $f(\mathbf{p})$ spojitou funkcí, a tak nezbude, než použít některou z metod necitlivých na nespojitosti. Do této třídy patří i simplexová metoda Nelderova-Meadova, která nese název `fmins` a je součástí standardní verze MATLABu (tedy vně knihovny Optimization Toolbox). Jde o robustní metodu, která za cenu pomalejší konvergence nalezne řešení \mathbf{p}^* s podstatně větší jistotou než metody gradientní. Omezení $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ a $\mathbf{h}(\mathbf{p})$ se zavádějí jako pokuty nebo bariéry. Jimi se modifikuje původní cílová funkce $f(\mathbf{p})$ na

$$\tilde{f}(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p}) + h(\mathbf{p}) \quad (5)$$

kde $g(\mathbf{p})$ a $h(\mathbf{p})$ jsou např. pokuty

$$\begin{aligned} g(\mathbf{p}) &= \mathbf{g}^T(\mathbf{p}) \mathbf{W}_g(\mathbf{p}) \mathbf{g}(\mathbf{p}) \\ h(\mathbf{p}) &= \mathbf{h}^T(\mathbf{p}) \mathbf{W}_h(\mathbf{p}) \mathbf{h}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (6)$$

Zde $\mathbf{W}_g(\mathbf{p})$ a $\mathbf{W}_h(\mathbf{p})$ jsou diagonální matice nezáporných vah, jejichž prvky na diagonálách jsou nulové při splnění jim odpovídající podmínky a rostou s velikostí jejího porušení. V MATLABu by se mohly tyto pokuty vypočítat z hodnot podmínek uložených ve vektorech \mathbf{g} a \mathbf{h} např. takto

```
gp = ((g < 0) .* scalesg .* g) .* g
hp = ((h~ = 0) .* scalesh .* h) .* h ,
```

kde `scalesg` resp. `scalesh` jsou vektory vhodných měřítek pokut. Aby nedocházelo k významnému překračování podmínek, měla by být měřítko dosti velká, aby pokuty byly přísné. Nadměrná velikost je však na závadu, protože zpomaluje proces optimalizace. Příjemnou vlastností takto použitého algoritmu `fmins` je možnost startování úlohy z libovolného bodu, tedy i z toho, který nesplňuje deklarované podmínky.

3.2 Doba života

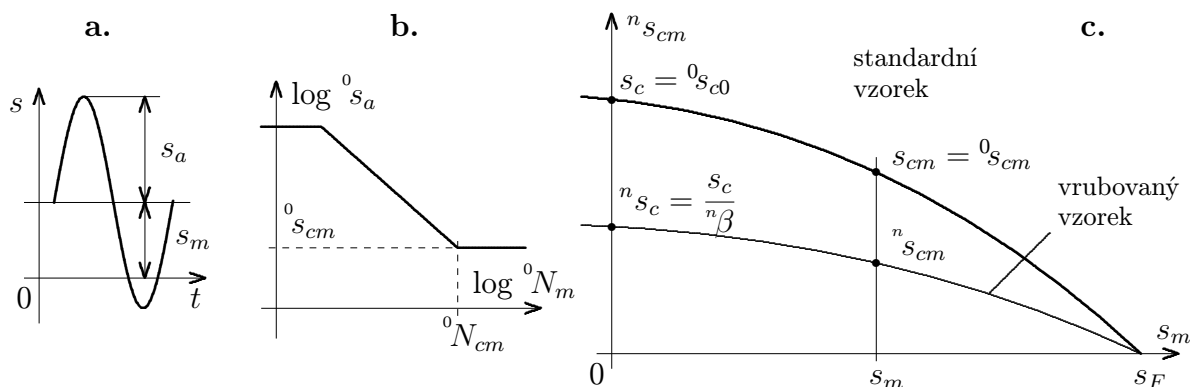
Zatímco ostatní podmínky kladené na konstrukci mají obvykle charakter jednoduchých omezení, týkajících se rozměrů, představuje podmínka na splnění garantované životnosti nejobtížnější a také nejméně spolehlivou část celého postupu. Důvodů pro toto tvrzení je několik:

- víceosá napjatost je nahrazena efektivní jednoosou,
- nedokonalé modely porušování materiálů,
- velký rozptyl materiálových charakteristik,
- nedokonalé databáze materiálových dat.

Často je nutno pracovat s odhady, které nemusí pro danou konstrukci a technologii její výroby zcela přesně platit. Přesto dále uvedený postup vycházející z minimálních apriorních informací vede k řešení, které je ovšem zatíženo neurčitou chybou vyplývající z přijatých aproximací. Jakékoliv zpřesnění úvodních informací má za následek zpřesnění výsledku.

3.2.1 Wöhlerova křivka a zobecněný Haighův diagram

Leštěný normalizovaný válcový vzorek materiálu (s indexem 0 vlevo nahoře = bez vrubu) vystavený opakovanému harmonickému zatěžování o střední hodnotě s_m jednoosého namáhání a amplitudě $s_a > s_{cm} = s_a(s_m)$ vydrží do lomu 0N_m cyklů podle obrázku **a**. Závislost je vynesena v obrázku **b**. a nazývá se Wöhlerovou křivkou. Ta se láme do konstantního napětí ${}^0s_{cm}$ při ${}^0N_{cm}$ cyklech. Závislost ${}^0s_{cm}$ na s_m , která je vynesena v obr **c.**, se nazývá Haighovým diagramem. V tomto obrázku je vynesena i závislost mezi únavy vrubovaných vzorků ${}^ns_{cm}$ (s indexem n vlevo nahoře charakterizujícím typ vrubu a zatížení) na s_m .



Mez únavy vrubovaného vzorku lze určit za pomoci experimentálně stanoveného koeficientu ${}^n\beta$ vrubovaného vzorku jako

$${}^n s_{cm} = \frac{{}^0 s_{cm}}{{}^n\beta} \approx \frac{s_c}{{}^n\beta} \left(1 - \frac{s_m}{s_F} \right)^k \quad (7)$$

Pokud koeficient koncentrace napětí ${}^n\beta = {}^n\beta({}^nK_t, k_V, k_q)$ není znám, může být odhadnut pomocí formule

$${}^n\beta = \frac{\beta({}^nK_t)}{k_V k_q}, \quad (8)$$

kde nK_t je teoretický koeficient koncentrace napětí příslušející typu n vrubu a zatížení označovaný také jako α_H , k_V je koeficient velikosti součásti a k_q je koeficient vyjadřující účinek kvality povrchu na koncentraci napětí na povrchu. Existuje řada vztahů, kterými lze aproximovat závislost β na nK_t . Např. podle Neuberovy formule je

$$\beta({}^nK_t) = 1 + \frac{{}^nK_t - 1}{1 + \sqrt{\frac{A}{\varrho}}}, \quad (9)$$

kde $A(R_m)$ [mm] je Neuberův koeficient závislý na pevnosti materiálu R_m a tím i velikosti jeho zrna a ϱ [mm] poloměr křivosti vrubu. Pro praktické účely může pro jeho určení sloužit vztah

$$\sqrt{A} = 289,1/R_m - 0,1217 \quad (10)$$

3.2.2 Faktory kvality povrchu a velikosti součásti

Z rovnice (8) vyplývá, že pro odhad meze únavy skutečné součásti je zapotřebí znát i faktory kvality povrchu součásti k_q a velikosti součásti k_V . Pro tyto účely byly aproximovány jejich diagramy regresními formulemi, které byly nalezeny delším numerickým experimentem:

$$k_q = 1 - \left(\mathbf{x}_q^T \mathbf{C}_q \mathbf{y}_q \right)^2, \quad (11)$$

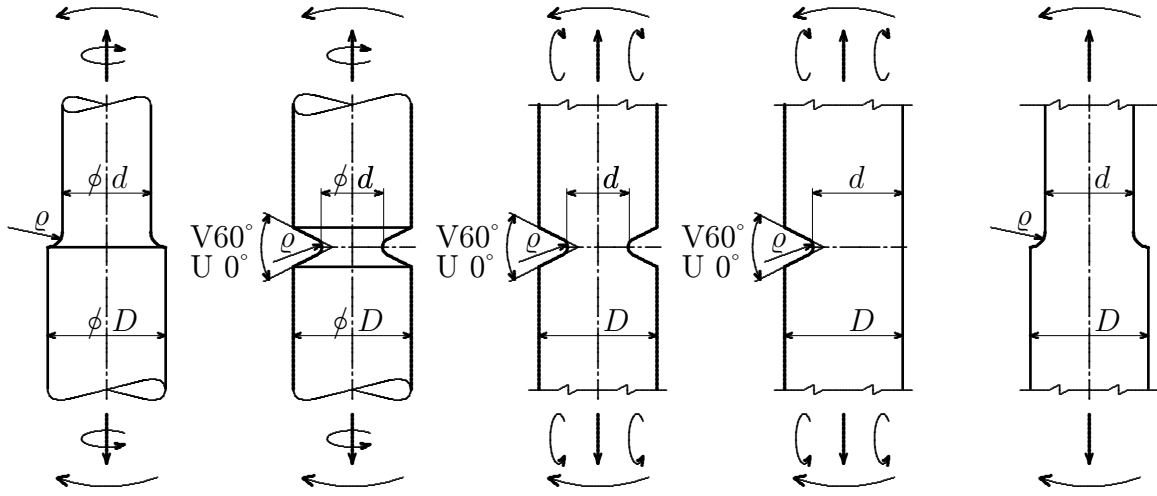
kde $\mathbf{x}_q = [1, x_q, x_q^2]^T$ a $\mathbf{y}_q = [y_q, y_q^2, y_q^3]^T$ s proměnnými $x_q = R_m^{c_{qx}^2}$ resp. $y_q = R_a^{c_{qt}^2}$. Matici regresních koeficientů lze nalézt v [22]. Koeficient vlivu velikosti součásti

$$k_V = \left(1 + \sqrt{\gamma A} \right) \left(\frac{D}{d} \right)^{3m} \quad (12)$$

kde d je průměr zkušební vzorku, na němž byla zjišťována mez únavy, a D je průměr skutečné součásti. Exponent m je z intervalu $-0,06 \leq m \leq -0,03$. Koeficient A se odhaduje podle rov. (10). Veličina γ je t. zv. poměrný gradient napětí na povrchu sledovaného kritického místa ([22]).

3.2.3 Teoretický koeficient koncentrace napětí

Výzkumen velikosti teoretického koeficientu napětí se v minulosti zabývala řada vědců včetně Neubera. Japonské práce Nisitaniho a jeho pokračovatelů ukázaly, že Neuberovy formule vykazují systematické odchylky od hodnot nK_t stanovených podrobnými numerickými experimenty. Šlo o 17 typů vrubů a zatížení podle obrázku:



Bohužel japonské práce obsahovaly řadu chyb, které se ani po přímém kontaktu s autory nepodařilo zcela odstranit. Naštěstí však jimi publikované tabulky výsledků výpočtů tyto chyby nevykazovaly, a proto bylo možno je zpracovat vlastním postupem. Po dlouhých zkouškách přesnosti náhrady jsme opustili japonský přístup spočívající v korekci Neuberova koeficientu koncentrace napětí ${}^nK_{tN}$ a zvolili přímou náhradu dvouparametrických tabulek nK_t formulí

$${}^nK_t = 1 + \mathbf{x}_K^T {}^n\mathbf{C}_K \mathbf{y}_K, \quad (13)$$

Jeho závislost na geometrii vrubu a na typu zatížení je obsažena v matici regresních koeficientů \mathbf{C}_K a ve vektorech \mathbf{x}_K a \mathbf{y}_K , které jsou funkcemi bezrozměrných proměnných $\xi = (D-d)/D$ a $\eta = \rho/D$ umocněných na exponenty, které jsou rovněž výsledkem regrese:

$$\begin{aligned} x &= \xi^{n_{c_x}} & ; & & y = \eta^{n_{c_y}} \\ \mathbf{x}_K &= [p_1(x), p_2(x), \dots, p_5(x)]^T \\ \mathbf{y}_K &= [y^{-2}, y^{-3}, y^{-4}, y^{-5}]^T \end{aligned} \quad (14)$$

Prvky vektoru \mathbf{x}_K jsou ortogonální polynomy. Jejich koeficienty stejně jako numerické hodnoty všech regresních koeficientů jsou uvedeny v [22] pro všech 17 případů vrubů. Výsledek regrese pro jeden případ je v posledním obrázku.

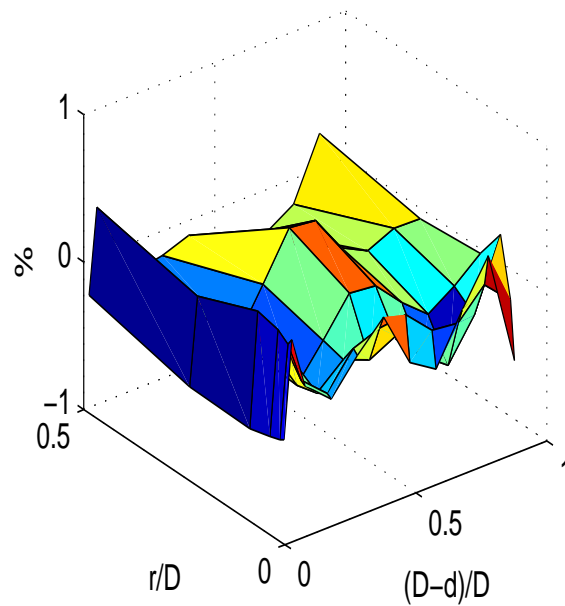
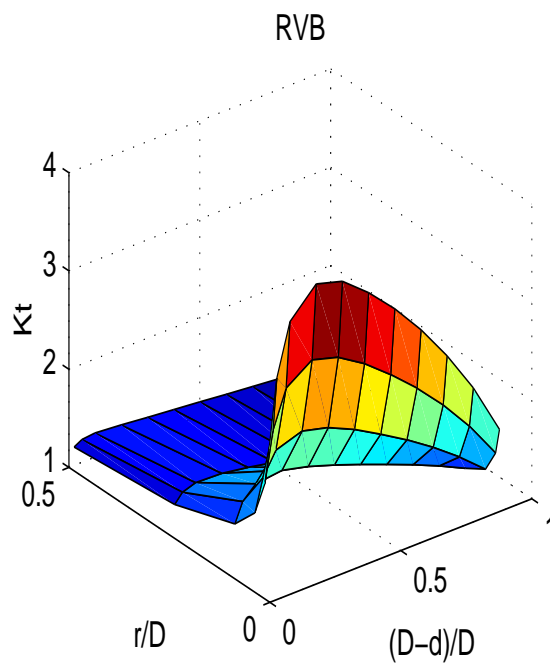
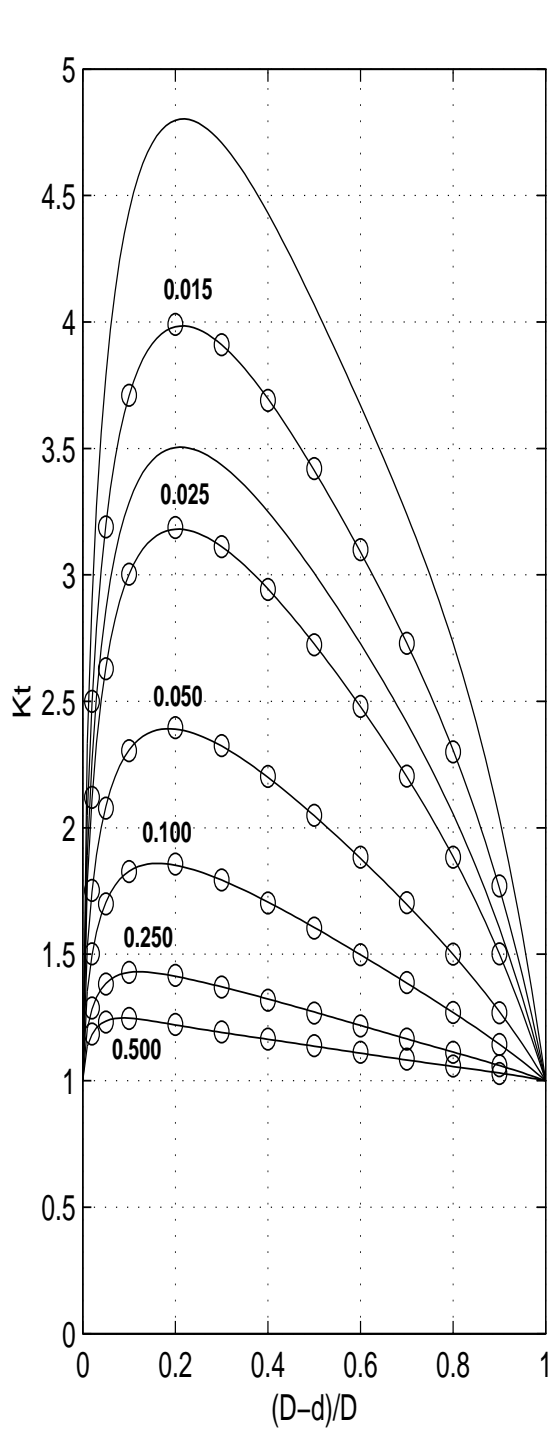
3.2.4 Poškození a doba života

Rovnici střední části Wöhlerovy křivky, která se v logaritmických souřadnicích jeví jako přímka, lze zapsat (s vynechanými některými indexy) jako

$$\frac{N_a}{N_c} = \left(\frac{s_c}{s_a} \right)^w \quad (15)$$

Rozložíme-li napětěvé procesy ve všech kritických bodech konstrukce do plných cyklů postupem popsaným v [17] (rain-flow-method), pak relativní poškození vyvolané i -tým cyklem za předpokladu platnosti lineárního zákona kumulace poškození (Palmgren-Minera) bude ve vrubu se zatížením typu n

$${}^n d_i = \frac{1}{{}^n N_{ai}} = \frac{1}{{}^n N_c} \left(\frac{s_{ai}}{s_{cmi}} \right)^{n w_c} \quad (16)$$



Ukázka zpracování tabulky hodnot koeficientu koncentrace napětí vrub typu $n = \text{RVB} = \text{ kruhový vzorek (R), vrub tvaru V } 60^\circ, \text{ ohyb (B)}$

- a) 2D diagram $K_t(\xi, \eta)$; zadané body (\circ), aproximace(-)
- b) 3D diagram $K_t(\xi, \eta)$
- c) 3D diagram rozložení chyb náhradyv %

Celkové relativní poškození v j -tém kritickém místě za čas pozorování T_o bude

$${}^n D_{jo} = \sum_i {}^n d_{ij} \quad (17)$$

Jemu odpovídající doba života by měla být ${}^n \tilde{L}_j = T_o / {}^n D_{jo}$. Protože však zákon lineární kumulace poškození neplatí přesně, bude skutečná životnost ${}^n L_j = k_{dj} {}^n \tilde{L}_j$. O životnosti díla potom rozhoduje minimální délka života ${}^n L_j$. Koeficienty k_{dj} nejsou známy předem a mohly by se určit dodatečně experimentálně zkouškami prototypů. Pokud není znám lepší odhad, volí se $k_{dj} = 1$.

4 Závěr

Právě popsaný metodický postup je řešením grantového projektu GAČR 101/95/0087 a zčásti i projektu 101/97/0226. Metodika byla ověřována na speciálních typech matematických modelů a to jak numericky, tak i experimentálně. Zkoušené matematické modely byly hřídelového typu ([9], [15], [28]) a příhradové ([10], [27], [30]). Experimentálně se ověřovala pouze příhradová konstrukce. Pro tyto typy konstrukcí byla ověřena funkčnost metodiky a dokonce vzniklé programové vybavení sestavené v jazyku MATLAB je k dispozici i pro konkrétní aplikační využití.

Reference

- [1] M. BALDA: Optimalizace konstrukcí z hlediska únavové životnosti. IN: „Výpočtová mechanika 95“, 11. konf. ZČU-FAV Plzeň, Pernink, 1995.
- [2] M. BALDA: Výpočet kmitání rozsáhlých mechanických soustav. IN: „Dynamika strojů 95“, Kolokvium ÚT AV ČR, Praha, 1995.
- [3] M. BALDA: A comparison of methods for numerical solution on dynamic nonlinear multidegree of freedom systems. IN: Proc. of Ninth World Congress IFToMM, Milano, 1995.
- [4] V. ZEMAN, Z. HLAVÁČ: Mathematical modelling of vibration of gear transmissions by modal synthesis method. IN: Proc. of Ninth World Congress of IFToMM, Milano, 1995.
- [5] V. ZEMAN: Matematické modelování, kmitání ozubených převodů. IN: „Výpočtová mechanika 95“, 11. konf. ZČU-FAV Plzeň, Pernink, 1995.
- [6] J. DUPAL: Ladění nekonzervativních lineárních kontinuí. IN: „Výpočtová mechanika 95“, 11. konf. ZČU-FAV Plzeň, Pernink, 1995.
- [7] L. KOVÁŘ, J. DUPAL: Spektrální ladění hřídelů kruhového průřezu. IN: „Výpočtová mechanika 95“, 11. konf. ZČU-FAV Plzeň, Pernink, 1995.
- [8] M. KEPKA, M. HEJMAN: Rozbor modelů únavového poškození z hlediska použití při optimalizaci konstrukcí. Výzk. zpráva VZVU 0985, ŠKODA VÝZKUM s. r. o., Plzeň, 1995.
- [9] V. ZEMAN, J. DUPAL: Modelování dynamické napjatosti hřídelových soustav. IN: „Dynamika strojů '96“, Kolokvium ÚT AVČR, Praha, 1996.
- [10] V. ZEMAN, J. DUPAL: Dynamický model a modální syntéza těleso-nosíkových systémů. IN: „Inženýrská mechanika '96“, Vol. II, Konf. TU Brno, Svratka, 1996.

- [11] J. DUPAL, V. ZEMAN: Mathematical modelling of multibody-beam system vibration. Předáno k publikování do časopisu ZAMM.
- [12] V. ZEMAN, L. KOVÁŘ: Dynamická analýza mechanických systémů složených ze subsystémů. VII. International Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Liberec, 1996
- [13] Z. HLAVÁČ: Formulace cílových funkcí a jejich gradientu pro úlohy snížení vibrací mechanických soustav. VII. International Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Liberec, 1996
- [14] V. ZEMAN, L. KOVÁŘ: Příspěvek k predikci únavové životnosti ozubení. IN: „Výpočtová mechanika '96“, Konf. ZČU-FAV Plzeň, Pernink, 1996, pp 261–268,
- [15] Z. HLAVÁČ: Optimalizace hřídelových soustav s ozubenými koly z hlediska životnosti ozubení. IN: „Výpočtová mechanika '96“, Konf. ZČU-FAV Plzeň, Pernink, 1996, pp 59–68,
- [16] J. DUPAL: Vliv strunového efektu na kmitání prostorových ráků. IN: „Výpočtová mechanika '96“, Konf. ZČU-FAV Plzeň, Pernink, 1996, pp 35–40,
- [17] M. BALDA: Vícekanálové sledování kumulace poškození v reálném čase. IN: „Dynamika strojů '96“, Kolokvium ÚT AVČR, Praha, 1996,
- [18] J. MICHÁLEK: Dynamické únavové zkoušky konstrukční uhlíkové ocele ČSN 411523. Výzk. zpráva, ZČU-FAV-ÚFY, 146 VP, Plzeň, 1996
- [19] M. KEPKA: Metodika odhadu parametrů syntetické Wöhlerovy křivky vrubovaného tělesa. Výzk. zpráva ŠKODA Výzkum s.r.o. Plzeň, 1996
- [20] M. KEPKA, J. CHVOJAN: Křivky životnosti základního materiálu a modelové součásti z oceli 11 523. Výzk. zpráva ŠKODA Výzkum s.r.o. Plzeň, 1996
- [21] M. BALDA: Optimalizace konstrukcí s vruby z hlediska únavové životnosti. IN: „Dynamika strojů '97“, Kolokvium ÚT AVČR, Praha, 1997
- [22] M. BALDA: Koeficienty koncentrace napětí a únava. Výzkum. zpráva ÚT AVČR Z-1234/97, Plzeň, 1997
- [23] M. BALDA: Nové formule pro výpočty koeficientů koncentrace napětí. IN: „Výpočtová mechanika '97“, konference ZČU-FAV Pernink, 1997
- [24] M. BALDA: Prediction of damage cumulation in vibrating rotors. IN: Proc. IFToMM Conference „Rotor Dynamics“, Darmstadt, Sep. 1-10, 1998
- [25] J. DUPAL: Prediction of lifetime of periodically excited structures. Zeszyty naukowe Nr. 4, XXXVI Sympozjon „Modelowanie w mechanice“, Politechnika Śląska, Gliwice, 1997, pp 121-126
- [26] V. ZEMAN, L. KOVÁŘ: Dynamical Analysis of the Large Mechanical Systems Containing Subsystems. ZAMM (v tisku)
- [27] V. ZEMAN, J. DUPAL: Optimalizace nosníkových konstrukcí z hlediska únavové životnosti. IN: „Výpočtová mechnika '97“, 13. konf. ZČU-FAV Plzeň, Pernink, 1997, pp 277-284
- [28] Z. HLAVÁČ: Příspěvek k optimalizaci hřídelových soustav s ozubenými koly. IN: „Výpočtová mechnika '97“, 13. konf. ZČU-FAV Plzeň, Pernink, 1997, pp 83-90
- [29] V. ZEMAN, J. DUPAL, Z. HLAVÁČ: Parametrická optimalizace konstrukcí z hlediska únavové životnosti. Výzk. zpráva č. 102-06-97, ZČU-FAV-KME, Plzeň, 1997
- [30] J. DUPAL: Optimalizace nosníkových konstrukcí z hlediska životnosti. IN: „Dynamika strojů '98“, ÚT AVČR, Praha, 1998
- [31] M. BALDA: Simulace diskretních náhodných procesů se zadanými charakteristikami. IN: Zafažovacie systémy, SAV-ÚMS, Modra, 1977