

OPTIMALIZACE KONSTRUKCÍ S VRUBY Z HLEDISKA ÚNAVOVÉ ŽIVOTNOSTI

Miroslav Balda ¹

1 Úvod

Problematika optimalizace není zdaleka nová, jak by se mohlo na první pohled zdát. Již v základních kurzech matematické analýzy se probírají otázky spojené s extrémní funkcí. Je však pravdou, že až širší zavedení počítačů do praxe přineslo rozvoj metod pro hledání optimálního řešení definovaného extrémem jisté t. zv. kriteriální (cílové, nákladové) funkce $f(\mathbf{p})$ závislé (obvykle nelineárně) na řadě volných parametrů. Často navíc existují jistá omezení vyplývající z povahy problému, kterým musí optimální řešení vyhovovat. Tato omezení mají u technických úloh povahu vyplývající z technologických nebo finančních možností, z požadovaného odstupu vlastních frekvencí od pracovních frekvencí, deformačních či napěťových mezí apod. Na rozdíl od dřívějších přístupů při návrzích optimálních strojů vyvíjí se v rámci grantového projektu GAČR č. 101/95/0087 metodika optimalizace konstrukce z hlediska únavové životnosti.

2 Formulace úlohy

Nalezení optimální konstrukce lze formulovat jako obecnou úlohu matematického programování, v níž hledáme takový vektor volných parametrů konstrukce $\mathbf{p}^* \in \mathcal{R}^p$ pro něž platí, že pro všechny vektory $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}^*$

$$f(\mathbf{p}^*) \leq f(\mathbf{p}) \quad (1)$$

při dodržení podmínek

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) \geq \mathbf{0} \quad ; \quad \mathbf{g}(\mathbf{p}) \in \mathcal{R}^q \quad (2)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad ; \quad \mathbf{h}(\mathbf{p}) \in \mathcal{R}^r \quad (3)$$

Metodami řešení úloh tohoto typu se zabývá specializovaná literatura (viz např. [1] a [2] a mnoho dalších). V ní lze nalézt množství postupů a algoritmů pro řešení úloh tohoto druhu. Bohužel žádný z nich nemůže být prohlášen za všeobecně optimální. Obvykle se najdou úlohy, pro něž je některý z postupů výhodnější než ostatní.

Obvyklými předpoklady kladenými na funkce $f(\mathbf{p})$, $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ a $\mathbf{h}(\mathbf{p})$ jsou hladkost funkcí a spojitost jejich definičních oborů včetně \mathbf{p} . Ty pak zajišťují existenci derivací, které jsou

¹Doc. Ing. Miroslav BALDA, DrSc., Západočeská univerzita - ÚFY, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň
mbalda@hera.zcu.cz

nezbytné u mnohých postupů. Praktické problémy však často tyto podmínky porušují. Potom je nezbytné založit optimalizační postup na algoritmech, které nepotřebují ke své funkci gradienty, ale pouze funkční hodnoty.

3 Cílová funkce

Problematikou výběru cílové funkce se zabývala již předcházející práce [3]. Z ní vyplynulo, že za kritériální funkci by měly sloužit náklady vydané na výrobek od vývoje až do jeho likvidace. Protože tato funkce obsahuje spoustu neznámých parametrů, které se nakonec mohou i v průběhu životnosti výrobku měnit, byla přijata za kritériální jednodušší funkce závislá na výsledné hmotnosti $m(\mathbf{p})$, která svým způsobem vyjadřuje materiálovou a prostorovou náročnost výrobku a kvalitativně i nejruznější náklady včetně údržby. Protože všechny dílčí náklady jsou funkcemi velikosti a tím i hmotnosti stroje, může být cílová funkce vyjádřena jako jistá obecně nelineární funkce hmotnosti $f_m[m(\mathbf{p})]$. Její nejjednodušší alternativou je samotná hmotnost výrobku, není-li k dispozici její lepší vyjádření.

4 Omezující podmínky

Máme-li navrhnout optimální konstrukci z hlediska její únavové životnosti, je jednou ze základních funkcí vektoru $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ funkce

$$g_1(\mathbf{p}) = L(\mathbf{p}) - L_G \tag{4}$$

kde $L(\mathbf{p})$ je doba života navržené konstrukce a L_G garantovaná doba života (např. v provozních hodinách). Kromě této podmínky musí být splněno $q - 1$ podmínek jiných, které je zapotřebí rovněž formulovat ve tvaru funkcí volných parametrů \mathbf{p} .

V případě, že bude volný parametr p_j rozměrem, bude přirozená podmínka znít

$$g_k(\mathbf{p}) = p_j \tag{5}$$

Jindy může jít i o vazby mezi parametry vyvolávané potřebou přístupnosti, smontovatelnosti apod. Tehdy by příslušná podmínka mohla mít např. tvar

$$g_i(\mathbf{p}) = d_4 - d_3, \tag{6}$$

pokud by se měla na čep o průměru d_4 připevnit součást, kterou by bylo zapotřebí převléci přes válcovou část o průměru d_3 , kde alespoň jeden z průměrů d_3 a d_4 by byl prvkem vektoru \mathbf{p} .

Může se také stát, že parametr p_k bude moci nabývat pouze diskrétní hodnoty, jako je tomu např. u průměrů čepů d_i pro valivá ložiska z katalogu. V tomto případě by příslušné funkce měly tvar

$$g_j(\mathbf{p}) = p_k \tag{7}$$

$$h_j(\mathbf{p}) = p_k - \sum_i -d_{i+1}[u(p_k - d_i) - u(p_k - d_{i+1})]'' \tag{8}$$

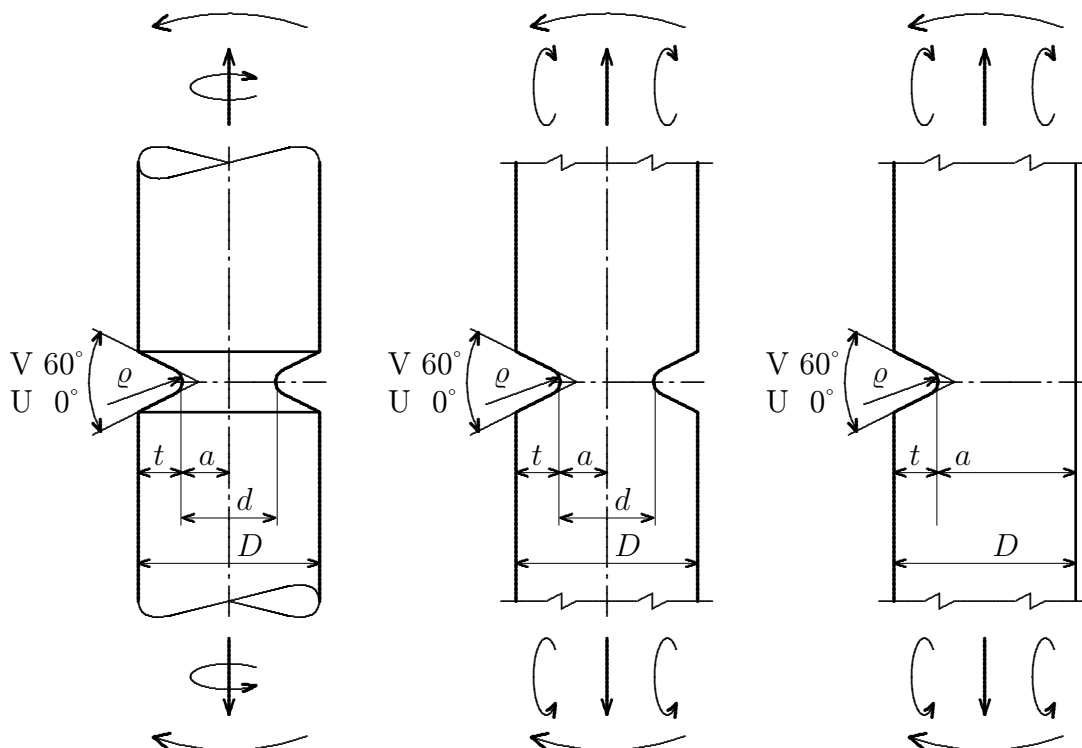
kde $u(x)$ je Heavisideův jednotkový skok v bodě 0, a kde $d_1 = 0$.

5 Doba života

Z výše uvedeného vyplývá, že nejkritičtějším bodem celého postupu není výpočet hodnoty cílové funkce $f(\mathbf{p})$, ale doby života $L(\mathbf{p})$ vstupující do omezující podmínky, zvlášť pak pro případ náhodného zatěžování dynamické konstrukce v procesu optimalizace.

Důvodů pro toto tvrzení je celá řada:

1. O době života konstrukce rozhodují místa, v nichž dochází k maximálnímu poškozování. Jsou to obvykle místa s konstrukčními vruby a nazývají se kritickými místy.
2. Jsou-li vruby v okolí volných parametrů, které se v procesu optimalizace mění, mění se i při totožném zatěžování efektivní napjatost ve vrubu vlivem změny jeho geometrie.
3. Doba života se dosud počítá z předpokladu jednoosé napjatosti a lineární kumulace poškozování s využitím dekompozice složitějšího napjatostního procesu na uzavřené cykly za pomoci metody stékání deště [3]. Tento přístup lze užít i v případě víceosé napjatosti s dominantní složkou jednoho z hlavních napětí při proporcionalitě všech jejích složek.
4. Nejsou-li složky víceosé napjatosti proporcionalní a nebo jsou dokonce nesynchronizované, ztrácí se význam základního pojmu v únavě, jímž je zatěžovací cyklus. Otázka výpočtu doby života při tzv. multiaxiální únavě se tím nesmírně komplikuje a je v současné době předmětem bádání v řadě pracovišť ve světě (viz např. [7]).



Ve všech případech výpočtů doby života je zapotřebí znát průběhy **skutečných** napětí v kritických místech. Ke skutečným napětím se lze dostat dvěma způsoby:

- a) lokálním přístupem – detailním řešením napětového pole ve vrubech,
- b) nominálním přístupem – výpočtem nominálních napětí a jejich korekcí pomocí koeficientů koncentrace napětí.

První způsob je nepoužitelný pro posuzování únavové životnosti celých konstrukcí pro značnou časovou náročnost řešení.

Druhý způsob je výrazně jednodušší, avšak potřebuje v každém optimalizačním kroku aktuální koeficienty koncentrace napětí. Ty proto musí být ve formě formulí, které je možno v každém okamžiku vyhodnotit. Pro různé vruby a typy zatížení podle obrázku 1 lze tyto formule nalézt v literatuře [4]. Podle těchto formulí lze teoretický koeficient koncentrace napětí α_H stanovit jako

$$\alpha_H = \kappa \alpha_N = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}, \quad (9)$$

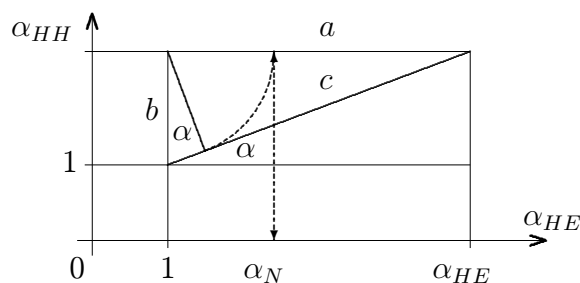
kde α_N je Neuberův koeficient koncentrace napětí a κ je opravný koeficient stanovený numerickým experimentem. Koeficient α_N lze vypočítat na základě znalosti teoretických koeficientů koncentrace napětí α_{HE} v polonekonečné desce s eliptickým vrubem, který je chápán jako mělký vrub, a α_{HH} platícím pro hyperbolický vrub chápáný jako hluboký. Koeficient koncentrace napětí α_N se potom vypočte z jednoduchého vzorce

$$\alpha_N = \frac{(\alpha_{HE} - 1)(\alpha_{HH} - 1)}{\sqrt{(\alpha_{HE} - 1)^2 + (\alpha_{HH} - 1)^2}} + 1 \quad (10)$$

Zkonstruujeme-li pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách $a = \alpha_{HE} - 1$ a $b = \alpha_{HH} - 1$, je přepona c dána výrazem ve jmenovateli. Geometrická interpretace výrazu pro α_H vyplývá z rovností

$$\alpha_N = \frac{ab}{c} + 1 = b \cos\alpha + 1 = a \sin\alpha + 1 \quad (11)$$

a z obrázku 2:



Koeficient κ se v japonském originále [4] počítá ze vztahů:

$$\kappa = \sum_{i=0}^{i_{max}} \sum_{j=0}^2 a_{ij} \epsilon^i \lambda^j, \quad (12)$$

kde a_{ij} jsou regresní koeficienty opravy vypočtené pomocí MKP, a dále kde

$$\begin{aligned} i_{max} &= 6 \text{ až } 8 \\ \epsilon &= 2\rho/D \\ \lambda &= 2t/D \end{aligned}$$

Ten může být snadno převeden do maticové formy vhodné pro zápis v MATLABu [5]

$$\kappa = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\epsilon} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{kde } \boldsymbol{\lambda}^T &= [1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{i_{max}}] \\ \boldsymbol{\epsilon}^T &= [1, \epsilon, \epsilon^2] \\ \mathbf{A} &= [a_{ij}] \end{aligned}$$

Známe-li koeficienty koncentrací α_H , můžeme postupem uvedeným v [6] pro kritické body konstrukce vytvořit syntetické Wöhlerovy křivky a z nich pro dané průběhy napětí vypočítat i jim odpovídající poškození případně dobu života [3].

6 Proces optimalizace konstrukce

Realizuje se následujícím algoritmem:

1. Zadání všech parametrů výchozího matematického modelu konstrukce.
2. Vytypování vektoru \mathbf{p} volných konstrukčních parametrů, které se mohou během optimalizačního procesu měnit.
3. Vyvolání vhodné optimalizační procedury, která se opakovaně obrací na podprogram pro výpočet hodnoty kritériální funkce. Jeho nejobecnější verze má následující strukturu:
 - a) Výpočet odezev ve všech místech konstrukce modulem MKP při zatěžování krátkým úsekem budících procesů.
 - b) Výpočet poškození ve všech bodech konstrukce pro všechny diskrétní časy.
 - c) Výběr množiny kritických míst s největším poškozením.
 - d) Výpočet hodnoty cílové funkce ve vybraných bodech pro právě aktuální vektor parametrů \mathbf{p} .
4. Výstup vektoru \mathbf{p}^* zoptimalizované konstrukce po dosažení optimálního řešení, t. j. minima hmotnosti v přípustné oblasti dané omezeními typu $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ a $\mathbf{h}(\mathbf{p})$.

7 Závěr

V referátu se uvádějí hlavní myšlenky metodiky návrhů konstrukcí s vruby z hlediska garantované únavové životnosti. Postup je založen na výpočtech nominálních dynamických napětí a na respektování vlivu vrubů na mez únavy, přičemž jejich velikosti se stanovují v průběhu celého procesu optimalizace dynamicky z aktuální geometrie. V dodatku je uveden algoritmus výpočtu efektivního koeficientu koncentrace napětí [5] využívající redukováná data z literatury [4].

Životnost se počítá z poškození vyvolaného charakteristickým zatěžovacím procesem. Výpočet poškození může být založen buď na metodě stékání deště při jednoosé napjatosti anebo na Stephanovově integrální metodě při víceosém namáhání [7]. Tento postup však bude nutno ještě experimentálně ověřit.

Dodatek

```
% SCF.M   Stress Concentration Factor
% ~~~~~
function Kt = scf(code,D,t,rho)
% ~~~~~
global S~i11
%
nu=.3; l=t/D; e=rho/D;
lT=[1, l, l^2, l^3, l^4, l^5, l^6];% lambda row
ep=[1; e; e^2];% epsilon col
x=sqrt(t/rho);
if x<1
    Kts=((-.1273*x+.2683)*x-.12)*x+1;
else
    y=1/x;
    Kts=(((.0842*y-.1451)*y+.0261)*y+1.035)*...
    (((-.1544*y+.3397)*y-.2846)*y+1.121);
end
Kts=(2*x+1)*Kts;
if t==D, Kt=1; return, end

a=D-t;
ar=a/rho; ars=sqrt(ar); arp=ar+1; arps=sqrt(arp);

if code<8% double notched:
    if code<4% circular:
        if code<2% a -> 1 tension
            N=2*nu*arps+ar+2;
            Ktd=(ar*(arps+0.5+nu)+(1+nu)*(arps+1))/N;
        elseif code==2% b -> 2 bending
            N=3*arp+(1+4*nu)*arps+(1+nu)/(arps+1);
            Ktd=(arps+1)*(3*ar-(1-2*nu)*arps+4+nu)*.75/N;
        else% c -> 3 torsion
            Kts=1+x;
            Ktd=(1+arps)^2/(1+2*arps)*.75;
        end% flat:
        elseif code==4% d -> 4 tension
            Ktd=2*arp*ars/(ars+arp*atan(ars));
        else
            if code<6% e -> 5 inplane bending
                Ktd=ar*ars/.75/(ars+(ar-1)*atan(ars));
            else% f,g -> 6,7 transverse bending U & V
                Kts=2*(1+nu)*x/(3+nu)+1;
                Ktd=2*(1+nu)*ars/((3+nu)*atan(ars)-(1-nu)*ars/arp);
            end
        end
    else% single notched flat:
        if code<10%
            lT=[lT, l^7, l^8];
            b1=2*arp*ars/(arp*atan(ars)+ars);
            b2=ar^1.5/(ars+(ar-1)*atan(ars))/.75;
            if code<9% h -> 8 tension
                c=(b1-arps)*3/(4*arps/b2-3);
                Ktd=(b1-2*c)/(1-c/arps);
            else% i -> 9 inplane bending
```



```

-1.2098 38.0317 -220.164      27.2560 -51.9612 25.1774
-0.0139 -0.0054 1.5961      -23.9118 49.8997 -26.5951
                                8.0185 -17.6893 9.8502

0.9735 0.0036 0.0070
0.7227 -0.2412 0.0230      % flat dbl transv. bend. U: g -> 7
-1.8034 -2.2175 1.3980      0.9680 0.0515 0.2553
1.7308 7.0844 -3.3948      2.3534 -54.8262 320.423
-0.7339 -6.8807 2.6137      -10.0940 354.108 -2209.81
0.1099 2.2525 -0.6471      28.8853 -1172.25 7508.45
0 0 0      -48.6517 2057.86 -13355.2
                                42.4796 -1814.50 11838.8
                                -14.9403 629.540 -4102.83

% flat dbl transv. bend. V: f -> 6
0.9828 -0.4343 3.5438
1.5236 -25.7113 117.095
-11.1918 292.716 -1555.67
39.1363 -1135.95 6288.58
-70.1820 2101.26 -11859.8
62.0517 -1869.87 10639.5
-21.3202 637.976 -3633.18

0.9743 0.0182 -0.0059
0.0164 0.2120 0.0315
4.1307 -8.7720 3.9795
-16.4250 33.6105 -16.8787
29.2237 -63.4641 34.8586
-25.7567 59.9965 -34.9715
8.8363 -21.6003 12.9858
];
i11=[1,8,15,22,29,36,43,50,...
      57,64,71,78,85,92,99,108,...
      117,126,135,142,149,156,163];
0.9735 0.0227 -0.0096
0.0685 -0.0311 0.2248
3.3873 -5.5445 1.4683
-14.7925 25.3049 -10.1166

```

Reference

- [1] Himmelblau D. M.: Applied Nonlinear Programming. McGraw-Hill, New York, 1992
- [2] Avriel M.: Nonlinear Programming. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996
- [3] Balda M.: Vícekanálové sledování kumulace poškození v reálném čase. Kolokvium "Dynamika strojů", ÚT AVČR Praha, 1996
- [4] Noda N.A., Sera M., Takase Y.: Stress concentration factors for round and flat test specimens with notches. Int. J. Fatigue (17), No 3., pp 163–178, 1995
- [5] Balda M.: SCF.M–Stress concentration factor. Programový modul v jazyku MATLAB. ZČU–FAV–ÚFY, Plzeň, 1996
- [6] Kepka M.: Metodika odhadu parametrů syntetické Wöhlerovy křivky vrubovaného tělesa. Výzk. zpráva ŠKODA Výzkum, VZVÚ 1098, Plzeň, 1996
- [7] Stephanov S.: A curvilinear integral method for multiaxial fatigue life computing under non-proportional, arbitrary or random stressing. Int. J. Fatigue (15), No 6, pp 467–472, 1993